



DAR2/Profesional/027/2/2022

MATH

Modul 2

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

Andhin Dyas Fitriani, M. Pd.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Ristek,
dan Teknologi
2022



No. Kode: DAR2/Profesional/027/2/2022

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

MODUL 2 MATEMATIKA

Penulis:

Andhin Dyas Fitriani, M. Pd.

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISTEK DAN
TEKNOLOGI**

2022

Judul : Pendalaman Materi Matematika

Penulis : Andhin Dyas Fitriani, M. Pd.

ISBN :

Editor : Dr. Wiryanto, M. Si

Dra. Maratun Nafiah, M. Pd

Penyunting :

Desain Sampul dan Teta Letak :

Penerbit :

Redaksi :

Distributor Tunggal :

Cetakan Pertama :

Hak cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang memperbanyak modul ini dalam bentuk dan dengan cara apapun tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT yang Maha Esa atas kuasa dan izin-Nya, Modul 2 tentang Pendalaman Materi Matematika dapat diselesaikan dengan baik, tertib, dan efektif tanpa kendala apapun yang berarti. Modul 2 ini disusun dengan tujuan untuk meningkatkan kemampuan peserta Pendidikan Profesi Guru dalam mengembangkan RPP, bahan ajar, media pembelajaran, LKPD, dan instrumen penilaian untuk digunakan dalam pembelajaran di SD. Berdasarkan tujuan tersebut, Modul 2 ini dikembangkan menjadi empat kegiatan belajar sebagai berikut:

1. Kegiatan Belajar 1: Bilangan
2. Kegiatan Belajar 2: Geometri dan Pengukuran
3. Kegiatan Belajar 3: Statistika dan Peluang
4. Kegiatan Belajar 4: Kapita Selekta Matematika

Terima kasih setinggi-tingginya kepada berbagai pihak yang telah membantu terselesaikannya Modul 2 ini. Semoga Modul 2 ini dapat memandu peserta PPG dalam melaksanakan pembelajaran mandiri melalui dalam jaringan (daring) sehingga mereka dapat merencanakan, melaksanakan, dan melakukan penilaian pembelajaran dengan baik yang pada akhirnya dapat dipraktikkan di sekolah tempat mereka bekerja dengan sebaik-baiknya untuk meningkatkan kualitas pendidikan di sekolah khususnya dan pendidikan nasional pada umumnya.

Bandung, 30 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
KEGIATAN BELAJAR 1 – BILANGAN	
A. Pendahuluan	1
1. Deskripsi Singkat	1
2. Relevansi	2
3. Petunjuk Belajar	2
B. Inti	3
1. Capaian Pembelajaran	3
2. Sub Capaian Pembelajaran	3
3. Uraian Materi dan Contoh	4
a. Teori Belajar	4
b. Bilangan	10
c. Bilangan Bulat dan Operasi Hitung pada Bilangan Bulat..	19
d. Bilangan Pecahan dan Operasi Hitung pada Bilangan	36
Pecahan	
e. Persen, Perbandingan, dan Skala	52
f. FPB dan KPK	61
4. Tugas Terstruktur	65
5. Forum Diskusi	65
C. Penutup	66
1. Rangkuman	66
2. Tes Formatif	69
Daftar Pustaka	73

KEGIATAN BELAJAR 2 – GEOMETRI

A. Pendahuluan	75
1. Deskripsi Singkat	75
2. Relevansi	76
3. Petunjuk Belajar	77
B. Inti	77
1. Capaian Pembelajaran	77
2. Sub Capaian Pembelajaran	78
3. Uraian Materi dan Contoh	78
a. Dasar-dasar Geometri dan Pengukuran	78
b. Segi Banyak (Poligon)	86
c. Keliling dan Luas Bangun Datar	98
d. Kekongruenan dan Kesebangunan	115
e. Bangun Ruang	122
f. Luas Permukaan dan Volume Bangun Ruang	125
g. Debit	138
h. Jarak, Waktu, dan Kecepatan	140
4. Tugas Terstruktur	143
5. Forum Diskusi	144
C. Penutup	144
1. Rangkuman	144
2. Tes Formatif	148
Daftar Pustaka	152

KEGIATAN BELAJAR 3 – STATISTIKA DAN PELUANG

A. Pendahuluan	154
1. Deskripsi Singkat	154
2. Relevansi	155
3. Petunjuk Belajar	155
B. Inti	156
1. Capaian Pembelajaran	156
2. Sub Capaian Pembelajaran	156
3. Uraian Materi dan Contoh	157
a. Statistik, Statistika, dan Data	157
b. Penyajian Data	161
c. Distribusi Frekuensi	174
d. Distribusi Frekuensi Relatif	177
e. Ukuran Pemusatan Data	178
f. Ukuran Penyebaran Data	190
g. Nilai Baku	194
h. Kaidah Pencacahan	195
i. Peluang	203
4. Tugas Terstruktur	204
5. Forum Diskusi	204
C. Penutup	204
1. Rangkuman	204
2. Tes Formatif	207
Daftar Pustaka	213

KEGIATAN BELAJAR 4 – KAPITA SELEKTA MATEMATIKA

A. Pendahuluan	215
1. Deskripsi Singkat	215
2. Relevansi	215
3. Petunjuk Belajar	216
B. Inti	216
1. Capaian Pembelajaran	216
2. Sub Capaian Pembelajaran	217
3. Uraian Materi dan Contoh	217
a. Logika Matematika	217
b. Pola, Barisan, dan Deret Bilangan	228
c. Persamaan Linear, Pertidaksamaan Linear, dan Grafik Fungsi Linear	237
d. Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat, dan Grafik Fungsi Kuadrat	245
e. Trigonometri	254
4. Tugas Terstruktur	259
5. Forum Diskusi	259
C. Penutup	259
1. Rangkuman	259
2. Tes Formatif	263
Daftar Pustaka	266
TES SUMATIF	247
Kunci Jawaban	259



DAR2/Profesional/027/2/2022

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

MODUL 2

KEGIATAN BELAJAR 1

BILANGAN

Nama Penulis:

Andhin Dyas Fitriani, M.Pd

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISTEK DAN
TEKNOLOGI**

2022

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Kegiatan belajar matematika disusun dengan tujuan untuk memberikan pengetahuan dan wawasan Saudara terkait materi bilangan. Kegiatan belajar ini menyajikan bahasan mengenai konsep bilangan. Secara rinci kegiatan belajar terdiri dari 5 topik, yaitu menyajikan tentang:

- a. Bilangan (konsep bilangan, sistem numerasi bilangan, macam-macam bilangan).
- b. Bilangan bulat (definisi dan operasi hitung pada bilangan bulat).
- c. Bilangan pecahan (definisi, operasi hitung pada bilangan pecahan serta pecahan desimal).
- d. Persen, perbandingan dan skala.
- e. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK).

Kegiatan Belajar ini disusun secara cermat sesuai dengan tujuan yang harus dicapai dalam implementasi kurikulum 2013 mata pelajaran Matematika di Sekolah Dasar. Materi yang disajikan relevan dengan kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang guru profesional ketika mengabdikan dirinya dalam dunia pendidikan untuk mencerdaskan generasi bangsa Indonesia.

Berdasarkan Undang-undang Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen, pada Pasal 10 ayat (1) menyatakan bahwa “Kompetensi guru sebagaimana dimaksud dalam Pasal 8 meliputi kompetensi pedagogik, kompetensi kepribadian, kompetensi sosial, dan kompetensi profesional”. Jadi, tidak hanya menguasai materi, Saudara juga akan mampu mengembangkan materi bilangan dalam kegiatan pembelajaran di Sekolah Dasar dengan menerapkan pembelajaran yang realistik, kontekstual, aktif, kreatif, dan menyenangkan serta mampu mengembangkan media pembelajaran yang tepat bagi peserta didik Sekolah Dasar.

Kegiatan Belajar ini disusun dengan tujuan agar Saudara memiliki kemampuan pemahaman terhadap konsep matematis yang lebih luas dan komprehensif, khususnya pada materi esensial pada pembelajaran matematika di

Sekolah Dasar. Pemahaman yang mendalam akan membantu Saudara dalam merancang dan melaksanakan pembelajaran matematika di Sekolah Dasar.

2. Relevansi

Kegiatan belajar ini juga relevan dengan kompetensi pedagogik. Melalui pembelajaran dengan modul ini Anda akan belajar memahami peserta didik dengan karakter yang beragam dari segi kemampuan berpikir matematis dan merancang perencanaan pelaksanaan pembelajaran serta evaluasi pembelajaran matematika yang sesuai. Kegiatan belajar ini selain berisi materi utama, juga dilengkapi dengan materi penunjang yang dapat dipelajari untuk lebih memperkuat konsep dan pemahaman mengenai pembelajarannya di Sekolah Dasar (SD) yang berupa video, ppt, dan contoh pengembangan lembar kerja pada materi bilangan di SD. Selain itu juga dilengkapi dengan *link* rujukan yang dapat dipelajari mengenai konsep bilangan.

Setelah mempelajari modul pada materi utama serta materi penunjang, peserta diharapkan dapat:

- a. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan bulat dan bilangan pecahan.
- b. Merancang pembelajaran matematika SD yang berkaitan dengan pembelajaran bilangan dengan menerapkan pendekatan berbasis konstruktivisme.
- c. Menganalisis karakteristik suatu kasus pembelajaran bilangan matematika SD.
- d. Menyusun soal berkaitan dengan pembelajaran bilangan yang mengukur kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi.
- e. Memecahkan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan konsep 2ersam, FPB dan KPK.

3. Petunjuk Belajar

Untuk membantu Anda dalam memahami modul ini alangkah lebih baik diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut ini:

- a. Bacalah dengan cermat uraian-uraian penting yang terdapat dalam modul ini sampai anda memahami secara tuntas tentang apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.

- b. Temukanlah kata-kata kunci dari kegiatan belajar ini. Alangkah lebih baik apabila anda mencatat dan meringkas hal-hal penting tersebut.
- c. Pahami modul ini melalui pemahaman dan pengalaman sendiri serta diskusikanlah dengan teman atau instruktur Anda.
- d. Bacalah dan pelajaryl sumber-sumber lain yang relevan. Anda dapat menemukan bacaan dari berbagai sumber, termasuk dari internet.
- e. Mantapkanlah pemahaman anda melalui pengerjaan forum diskusi dan tes formatif yang tersedia dalam modul ini dengan baik. Kemudian, nilai sendiri tingkat pencapaian anda dengan membandingkan jawaban yang telah anda buat dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat diakhir modul.
- f. Diskusikanlah apa yang telah dipelajari, termasuk hal-hal yang dianggap masih sulit, dengan teman-teman Anda.

B. INTI

1. Capaian Pembelajaran

- a. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika sekolah secara mendalam.
- b. Menguasai konsep aplikasi pedagogis (*pedagogical content knowledge*) minimal teori belajar, evaluasi proses dan hasil belajar, kurikulum, dan prinsip-prinsip pembelajaran matematika SD secara mendidik.
- c. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi bilangan, bilangan bulat, bilangan pecahan, persen, perbandingan, skala, FPB dan KPK.
- d. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait bilangan.

2. Sub Capaian Pembelajaran

- a. Menerapkan prinsip operasi hitung bilangan bulat dan pecahan.
- b. Merancang pembelajaran matematika SD yang berkaitan dengan pembelajaran bilangan dengan menerapkan pendekatan konstruktivisme.

- c. Menganalisis karakteristik suatu kasus pembelajaran bilangan matematika SD
- d. Menyusun permasalahan berkaitan dengan pembelajaran bilangan yang mengukur kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi.

3. Uraian Materi dan Contoh

a. Teori Belajar

Pada bagian ini, Saudara akan mempelajari sekilas terkait teori belajar. Merancang sebuah pembelajaran tentu saja tidak hanya mempertimbangkan aspek pengetahuan yang akan dicapai, dan bagaimana mendampingi siswa mengkonstruksi pemahaman tersebut. Akan tetapi perkembangan kognitif siswa pun perlu kita pertimbangkan. Pada proses belajar, paling tidak terdapat tiga proses kognitif yang terjadi, antara lain bagaimana memperoleh pengetahuan baru, bagaimana menerjemahkan informasi yang diterima, dan bagaimana menguji relevansi pengetahuan. Pada dasarnya perkembangan kognitif merupakan tahapan perkembangan pada individu dalam memahami, mengolah informasi, sampai pada memecahkan suatu masalah.

Kita tahu bahwa usia sekolah dasar masih berapa pada perkembangan kognitif konkrit atau semi konkrit. Salah satu tokoh yang mengkaji tentang perkembangan kognitif adalah Jean Piaget. Teori Jean Piaget mengasumsikan bahwa perkembangan berpikir individu melalui perkembangan neurologis dan lingkungannya. Pada teorinya Jean Piaget membagi tahap perkembangan kognitif manusia menjadi empat fase.

Pada teorinya Jean Piaget mengungkapkan bahwa proses berpikir manusia merupakan perkembangan yang secara bertahap dari berpikir konkrit sampai menuju ke berpikir secara abstrak. Tahapan berpikir yang dikemukakan Piaget tetap bagi setiap individu, hanya saja setiap orang tentu akan memasuki usia tahapan yang tidak sama setiap individunya. Hal tersebut karena perkembangan berpikir dipengaruhi bagaimana

individu tersebut mengolah pengetahuan. Piaget mengemukakan pada dasarnya setiap individu akan melalui empat tahapan perkembangan, yaitu (Bell, 1981):

a. Tahapan sensori motor

Pengamatan yang dilakukan oleh J. Piaget, tahapan ini biasanya muncul pada rentang usia 0-2 tahun. Periode ini memiliki karakteristik, gerakan yang dimunculkan adalah akibat reaksi langsung dari rangsangan, yang mungkin muncul dari merana suatu objek. Seorang anak belum menyadari bahwa objek adalah tetap.

b. Tahapan pra operasional

Pengamatan yang dilakukan oleh J. Piaget, tahapan ini muncul pada rentang usia 2-7 tahun. Pada tahapan ini sudah muncul aktivitas mental, tidak hanya sekedar aktivitas motoric. Sehingga pada tahapan ini sudah mulai proses berpikir atau logika. Pada usia ini, anak pada proses berpikirnya belum berdasarkan sesuatu yang logis, tetapi keputusan diambil berdasarkan apa yang dilihat saat itu. Tahapan ini juga sering disebut sebagai tahapan pemberian simbol, muncul penamaan suatu benda. Anak sudah mulai belajar memanipulasi simbol untuk benda di sekitarnya.

c. Tahapan operasional konkrit

Pengamatan yang dilakukan oleh J. Piaget, tahapan ini biasanya muncul pada rentang usia 7-12 tahun. Tahapan ini disebut operasional konkrit karena anak sudah mulai berpikir logis berdasarkan manipulasi fisik dari suatu objek. Pada tahapan ini karakteristik berpikir anak adalah:

a) Kombinabilitas atau klasifikasi

Karakteristik berpikir ini merupakan kesimpulan yang diambil apabila ada dua kelompok maka kita dapat menggabungkannya. Dengan kata lain anak memahami operasi hitung penjumlahan (menggabungkan dua himpunan atau kelompok). Selain itu anak

juga dapat membandingkan anggota dua himpunan (membandingkan kuantitas dua kumpulan).

b) Reversibilitas

Karakteristik berpikir ini adalah operasi kebalikan. Operasi logis dalam matematika pasti dapat dilakukan dengan operasi kebalikan. Reversibilitas ditandai siswa dapat memahami konsep pertukaran atau komutatif.

c) Asosiasivitas

Asosiasivitas merupakan operasi beberapa kumpulan yang dikombinasikan menurut sebarang urutan. Ditandai dengan siswa mampu memahami hukum asosiatif.

d) Identitas

Identitas merupakan operasi adanya suatu unsur i yang apabila dikombinasikan dengan kelompok tertentu maka tidak ada perubahan pada kelompok tersebut.

e) Korespondensi satu-satu

Korespondensi satu-satu antara objek dua kumpulan. Setiap anggota pada kumpulan yang satu berkorespondensi dengan satu anggota kumpulan yang lain.

f) Kesadaran akan adanya prinsip konservasi

Konservasi berkaitan dengan kesadaran bahwa satu aspek dari benda tetap, meskipun aspek yang lain berubah. Pada periode dilandasi oleh observasi dari pengalaman dengan objek nyata.

d. Tahapan operasional formal

Pengamatan yang dilakukan oleh J. Piaget, tahapan ini biasanya muncul pada rentang usia lebih dari 12 tahun. Tahapan ini juga dikenal sebagai tahapan hipotetik-deduktif, dan merupakan tahap tertinggi dari perkembangan intelektual. Pada tahapan ini, sudah

mulai banyak menggunakan simbol dan mampu berargumen tanpa pelibatan benda empiric.

Tahapan tersebut pasti terjadi pada perkembangan kognitif individu dan spontan, akan tetap umur fleksibel sesuai dengan stimulus yang diberikan. Berkaitan dengan pembelajaran matematika, Piaget mengemukakan terdapat enam tahap perkembangan belajar, yaitu

a) Hukum kekekalan bilangan

Ciri seorang siswa sudah mencapai tahap penguasaan hukum kekekalan bilangan adalah saat siswa mampu menunjukkan banyaknya suatu benda sama meskipun letaknya kita rubah atau susunannya kita rubah. Saat siswa sudah mencapai tahap ini maka siswa akan siap mengkonstruksi pengetahuan terkait dengan konsep bilangan dan operasinya.

b) Hukum kekekalan materi

Ciri seorang siswa sudah mencapai tahap penguasaan hukum kekekalan materi adalah saat siswa mampu menunjukkan materi akan sama banyaknya meskipun bentuknya berubah atau tempat berpindah. Untuk melihat apakah siswa sudah mencapai tahap ini, kita bisa menggunakan demonstrasi sederhana, yaitu pada saat air dengan volume tertentu kita masukkan ke dalam gelas dan ke dalam mangkok dan siswa menyatakan air pada gelas dan pada mangkok sama banyaknya maka siswa sudah menguasai tahap ini.

c) Hukum kekekalan panjang

Ciri seorang anak sudah mencapai penguasaan ini adalah saat siswa mampu menunjukkan panjang suatu tali tidak berubah meskipun kita lengkungkan.

d) Hukum kekekalan luas

Hukum kekekalan luas dapat dipahami siswa bersamaan dengan hukum kekekalan panjang. Permainan yang mendukung untuk

membantu siswa menguasai hukum kekekalan luas adalah dengan permainan tangram. Luas suatu daerah atau benda akan tetap meskipun letaknya berubah.

e) Hukum kekekalan berat

Hukum ini menyatakan bahwa berat benda tidak berubah meskipun bentuknya berubah, tempat penimbangan berubah atau alat ukur berat ganti.

f) Hukum kekekalan isi

Hukum ini menyatakan bahwa apabila pada suatu wadah (misalkan penyimpanan air) dimasukkan suatu benda, maka zat cair yang tumpah akan sama dengan benda yang dimasukkan.

Selain Teori Jean Piaget, J Bruner juga mengkaji tentang perkembangan kognitif manusia. Teori Bruner menggambarkan suatu pandangan akan perkembangan kognitif, cara individu belajar dan memperoleh pengetahuan sampai pada menyimpan dan mentransformasi pengetahuan. Aliran perkembangan kognitif mengasumsikan bahwa individu berperan sebagai pengolah informasi, pengamat dan pemikir serta pengkonstruksi informasi. Bruner menyatakan bahwa belajar matematika pada hakikatnya belajar membangun konsep dan struktur matematika pada suatu materi tertentu, serta mampu mencari koneksi antara konsep dan struktur matematika itu.

Bruner merupakan ahli dari Harvard University yang menekankan pentingnya pengembangan berpikir. Bruner menyatakan ada tiga tahap proses kognitif, yaitu proses informasi baru, transformasi informasi, dan pengujian relevansi dan ketepatan pengetahuan. Proses perolehan pengetahuan atau informasi baru dapat diperoleh dari kegiatan membaca, mengamati, mencermati, atau mendengarkan informasi. Proses transformasi pengetahuan merupakan suatu proses memanfaatkan pengetahuan sesuai dengan pengetahuan yang kita peroleh. Informasi yang kita terima dianalisis, diproses atau diubah menjadi konsep yang

abstrak. Bruner mengungkapkan bahwa ketika anak mengkonstruksi pengetahuan sebaiknya didampingi dengan pemberian kesempatan untuk memanipulasi benda-benda atau alat peraga yang dirancang secara khusus agar dapat membantu siswa mengkonstruksi suatu konsep matematika.

Teori Belajar Bruner menyatakan ada tiga model tahap berpikir, sebagai berikut:

a. Model Tahap Enaktif

Pada tahap ini keterlibatan benda konkrit atau benda manipulative ataupun situasi nyata menjadi fokus utama dalam mengkonstruksi pengetahuan. Sehingga tidak ada keterlibatan imajinasi atau kata-kata. Tindakan anak secara langsung dalam memanipulasi objek berperan dalam membangun pengetahuan.

b. Model Tahap Ikonik

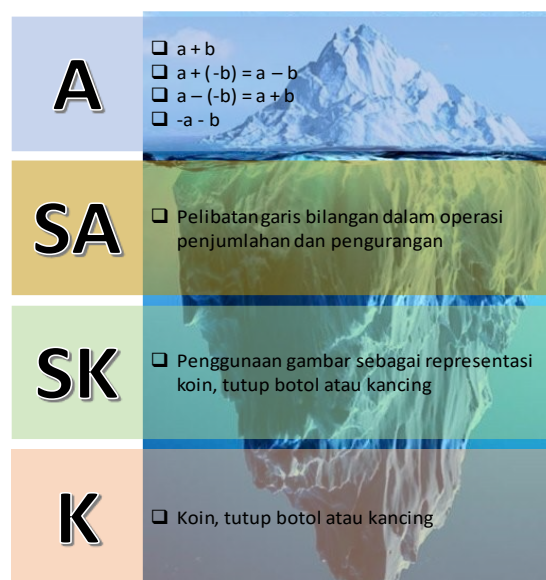
Pada tahap ini, pengetahuan itu direpresentasikan dalam bentuk bayangan visual, gambar, atau diagram, yang menggambarkan kegiatan kongkret atau situasi kongkret yang terdapat pada tahap enaktif. Tahap ini disebut juga dengan kegiatan semi konkrit. Anak memidahkan benda nyata dalam bentuk gambar.

c. Model Tahap Simbolis

Tahap ini dinamakan tahap simbolis karena menggunakan bahasa sebagai pola dasar. Anak dalam belajar matematika mulai memanipulasi simbol atau lambang objek tertentu. Penggunaan simbol atau notasi telah menggeser pelibatan objek pada tahap sebelumnya. Simbol yang dimaksud yaitu simbol abstrak yang dipakai berdasarkan kesepakatan orang-orang dalam bidang yang bersangkutan, baik simbol-simbol verbal, lambang-lambang matematika, maupun lambang-lambang abstrak yang lain.

Pada pembelajaran hierarkis proses berpikir menurut Bruner dilaksanakan dengan memulai pembelajaran dengan pelibatan benda

konkrit (benda nyata atau benda yang dimanipulasi, kemudian pada pelibatan tahap semi konkrit sehingga pada akhirnya siswa dapat berpikir secara abstrak. Sebagai contoh perhatikan ilustrasi ice berg berikut ini. Pada gambar tersebut terlihat bahwa perencanaan pembelajaran matematika hanya terlihat kecil di permukaan, di mana yang terlihat hanyalah konsep abstrak saja. Perlunya analisis awal terkait urutan tahapan pembelajaran dari pelibatan benda konkrit sampai ke tahap abstrak dapat meminimalisir kesalahan pemahaman maupun hambatan belajar yang mungkin muncul pada pembelajaran.



Gambar 1.1 Contoh Iceberg

b. Bilangan

Elemen konten mata pelajaran Matematika salah satunya adalah elemen bilangan. Bidang kajian bilangan meliputi tentang angka sebagai symbol suatu bilangan, konsep bilangan, operasi hitung bilangan, dan relasi antara berbagai operasi hitung bilangan dalam subelemen representasi visual, sifat urutan, dan operasi.

Mengenalkan konsep bilangan kepada siswa, tentu saja dapat kita lakukan melalui berbagai permasalahan yang ada di sekitar kita. Hal yang sederhana, yang mungkin Saudara pernah lakukan adalah mengajak

siswa membilang banyaknya alat tulis yang dibawanya. Atau mungkin kita juga mengajak siswa menghitung banyak siswa yang ada pada suatu kelas. Perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 1.2. Data Kependudukan Semester II Tahun 2021

(sumber: <https://www.dukcapil.kemendagri.go.id>)

Pada gambar tersebut terlihat banyaknya penduduk pada suatu rentang waktu tertentu. Bersama dengan siswa kita dapat menggali informasi, menurut pendapat siswa bagaimana kondisi data penduduk pada rentang semester sebelumnya atau bahkan perkiraan pada waktu selanjutnya. Mungkin, siswa akan menyampaikan pendapatnya bahwa penduduk akan semakin bertambah. Ilustrasi ini dapat kita arahkan untuk mengenalkan siswa pada konsep bilangan.

Bilangan merupakan suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*underfined term*). Bilangan merupakan suatu konsep yang abstrak, bukan simbol, bukan pula angka. Bilangan menyatakan suatu nilai yang bisa diartikan sebagai banyaknya atau urutan sesuatu atau bagian dari suatu keseluruhan. Bilangan merupakan konsep yang abstrak, bukan simbol, dan bukan angka. Tanda-tanda yang sering ditemukan bukan suatu bilangan tetapi merupakan lambang bilangan. Bilangan kita

simbolkan dengan angka. Lambang bilangan memuat angka dengan nilai tempat tertentu.

Mengajarkan konsep bilangan pada siswa sekolah dasar, tentu saja dimulai dari proses membilang dan kemudian menuliskan lambangnya. Saat siswa melakukan proses menghitung, sebetulnya muncul konsep abstrak disana, karena belum ada simbolisasi nya. Hal demikian yang kita nyatakan bahwa konsep bilangan merupakan salah satu konsep dalam kajian matematika yang bersifat abstrak. Sehingga para ahli bersepakat bahwa bilangan termasuk pada kategori *underfined term* atau sesuatu yang tidak didefinisikan. Saat siswa nantinya menuliskan lambang bilangan dari proses menghitung, simbol tersebut yang disebut dengan angka. Proses membilang anggota suatu kumpulan mengartikan bahwa bilangan dapat diyatakan sebagai suatu nilai yang menggambarkan banyaknya anggota suatu kumpulan. Misalkan saat kita meminta siswa untuk membilang banyaknya buku tulis yang dibawa. Selain itu, urutan dari anggota kelompok juga merupakan hasil interpretasi dari bilangan. Misalkan saat menyebutkan bahwa siswa A duduk di urutan kelima dari kiri. Yang terakhir, bilangan dapat menyatakan suatu bagian dari suatu keseluruhan.

Menurut sejarahnya, belum dapat dipastikan kapan konsep bilangan mulai ditemukan. Banyak ahli berpendapat bahwa konsep bilangan sudah muncul sejak peradaban manusia pertama ada. Konsep bilangan sudah dikenal sejak ditemukannya coretan pada dinding gua, kayu dan batu. Coretan tersebut pada masa dahulu digunakan untuk menyatakan banyaknya binatang buruan, banyak anggota keluarga, ataupun menyatakan banyak barang yang dimiliki. Secara tidak langsung, sudah juga mengenal konsep membilang, menghitung, bahkan korespondensi 1-1. Secara konseptual, matematika merupakan suatu konsep yang abstrak. Bilangan digunakan untuk menyatakan kuantitas dalam suatu himpunan.

Menuliskan bilangan mengikuti kaidah yang telah disepakati oleh ahli-ahli matematika. kumpulan lambang bilangan dan cara penulisannya berkembang mengikuti perkembangan zaman. Sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan disebut dengan sistem numerasi. Lambang yang menyatakan suatu bilangan disebut numeral. Pada awalnya di setiap suku bangsa memiliki lambang bilangan yang berbeda, pun demikian dengan sistem numerasinya. Beberapa sistem numerasi yang kita kenalkan pada peserta didik adalah sistem numerasi romawi dan sistem numerasi hindu-arab.

Lambang dasar bilangan yang kita gunakan merujuk pada sistem numerasi Hindu-Arab, yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Proses membilang untuk mengenalkan bilangan di siswa kelas rendah dimulai dengan proses membilang, karena berkaitan dengan berapa banyak anggota suatu kelompok tertentu. Misalkan tadi, siswa A membawa 5 buku tulis ke sekolah. Bilangan yang demikian disebut dengan bilangan cardinal. Sedangkan saat kita melakukan proses pengurutan, misal siswa A duduk di kursi kelima dari kiri, lima pada ilustrasi tersebut dimaknai sebagai bilangan ordinal. Bilangan ordinal menyatakan urutan dari suatu objek.

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menyatakan kuantitas suatu barang dengan bilangan. Saat peserta didik diminta untuk membilang banyaknya anggota pada suatu kumpulan atau himpunan akan kita nyatakan dengan bilangan. seperti yang telah dikemukakan bahwa bilangan menyatakan hasil dari proses membilang dinyatakan dengan bilangan cardinal. Bilangan kardinal juga digunakan untuk menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan. Contoh: Firman membawa 5 pensil ke sekolah. Pada contoh tersebut, 5 menyatakan suatu bilangan cardinal. Mengapa? Karena 5 kita dapatkan dari hasil membilang satu persatu pensil yang dibawa Firman. Selain bilangan kardinal, proses membilang juga berkaitan dengan bilangan ordinal, tetapi lebih menitik beratkan pada konsep penurutan.

Bilangan selain hasil dari suatu kegiatan membilang, juga bisa dari hasil pengukuran. Misalkan saja, guru meminta peserta didik mengukur tinggi badan atau mengukur meja yang ada di sekolah.

Sistem bilangan dapat didefinisikan sebagai himpunan dari bilangan dan operasi hitungnya yang berlaku pada himpunan bilangan tersebut.

a) Bilangan asli (*Natural Numbers*)

Siswa sekolah dasar pertama kali belajar bilangan salah satunya dengan cara membilang banyak benda, kemudian mengurutkan dan membandingkan banyak suatu benda. Saat siswa membilang banyak benda mulai dari 1, 2, 3, dan seterusnya.

Peserta didik kelas rendah sekolah dasar memulai mempelajari bilangan dengan membilang banyaknya anggota dari suatu kumpulan. Misal pada suatu pembelajaran, guru akan meminta siswa membilang banyaknya pensil yang dibawa masing-masing siswa. Pembelajaran yang dilakukan dapat dirancang guru dengan menggunakan benda konkrit ataupun benda manipulative. Bilangan yang merupakan interpretasi dari kegiatan membilang banyaknya anggota suatu kumpulan berkembang menjadi sebuah konsep himpunan bilangan asli. Pada bagian sebelumnya telah disebutkan bahwa konsep bilangan juga dibangun melalui sebuah korespondensi 1-1. Secara matematis proses membilang merupakan sebuah kegiatan korespondensi 1-1 antara banyaknya objek dari suatu kumpulan dengan himpunan bilangan asli.

Kumpulan dari bilangan-bilangan asli hasil membilang kita sebut dengan himpunan bilangan asli. Himpunan bilangan asli disimbolkan dengan huruf $\mathbb{N}$ (*Natural*), dan dituliskan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Pada pembelajaran di sekolah dasar, kita sering juga mendefinisikan bilangan asli sebagai kumpulan bilangan yang dimulai dari 1 (sebagai bilangan pertama dari bilangan asli) dan selalu bertambah 1.

Apabila kita memiliki dua atau lebih bilangan asli dan dioperasikan dengan operasi hitung penjumlahan ataupun perkalian, maka hasil yang kita peroleh merupakan anggota bilangan asli, atau dengan kata lain,

memiliki sifat tertutup terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian. Tetapi, apabila kita melakukan operasi hitung pengurangan ataupun pembagian pada dua atau lebih bilangan asli, hasil yang diperoleh tidak selalu anggota dari himpunan bilangan asli, contoh sederhana $2 - 5 = -3$, dimana -3 bukan merupakan anggota dari bilangan asli. Dengan kata lain, pada operasi hitung pengurangan ataupun pembagian tidak berlaku sifat tertutup.

b) Bilangan cacah (*Whole Numbers*)

Setelah peserta didik memahami apa itu bilangan asli, selanjutnya peserta didik mencoba memahami bahwa pada suatu kondisi tertentu, suatu kumpulan tidak memiliki anggota atau dinyatakan dengan 0. Himpunan suatu bilangan yang merupakan gabungan dari bilangan asli dan 0 disebut dengan bilangan cacah. Secara umum, untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan digunakan bilangan cacah. Melalui konsep bilangan cacah, peserta didik akan memahami bahwa suatu himpunan atau kumpulan memungkinkan tidak memiliki suatu anggota. Misal, siswa diminta untuk guru untuk membilang banyaknya buku gambar yang dibawa ke sekolah, dan terdapat siswa yang tidak membawanya, atau 0.

Himpunan bilangan cacah atau *whole numbers* disimbolkan dengan huruf W , dan dituliskan $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Pada pembelajaran di sekolah dasar, kita sering juga mendefinisikan bilangan asli sebagai kumpulan bilangan yang dimulai dari 1 (sebagai bilangan pertama dari bilangan asli) dan selalu bertambah 1.

Seperti halnya pada bilangan asli, apabila kita memiliki dua atau lebih bilangan cacah dan dioperasikan dengan operasi hitung penjumlahan ataupun perkalian, maka hasil yang kita peroleh merupakan anggota bilangan cacah, atau dengan kata lain, memiliki sifat tertutup terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian. Tetapi, apabila kita melakukan operasi hitung pengurangan ataupun pembagian pada dua

atau lebih bilangan cacah, hasil yang diperoleh tidak selalu anggota dari himpunan bilangan asli, contoh sederhana $0 - 4 = -4$, dimana -4 bukan merupakan anggota dari bilangan cacah. Dengan kata lain, pada operasi hitung pengurangan ataupun pembagian dua atau lebih bilangan cacah tidak berlaku sifat tertutup.

c) Bilangan bulat (*Zero numbers*)

Pada suatu kondisi tertentu, misalnya, saat siswa melihat suatu ilustrasi atau tanyangan tentang kegiatan menyelam, maka akan muncul suatu konsep ukuran jarak dibawah permukaan laut. Atau saat kita minta siswa mengamati mengapa air berubah menjadi es, kemudian mencoba melihat suhu pada freezer. Kedua kejadian tersebut memunculkan suatu ilustrasi bahwa ada bilangan di bawah nol, baik di bawah nol meter (kejadian menyelam), dan di bawah nol derajat celcius (kejadian es). Bilangan-bilangan yang menggambarkan kondisi tersebut dikenal dengan bilangan bulat negative. Apabila bilangan-bilangan digambarkan melalui garis bilangan, siswa akan melihat bahwa pada garis bilangan tersebut terbagi menjadi 3 kelompok, yaitu bilangan asli (bilangan positif), lawan dari bilangan asli (bilangan negative) dan bilangan nol. Himpunan bilangan bulat berisikan anggota himpunan bilangan asli dengan lawannya dan juga bilangan nol disebut himpunan bilangan bulat atau *Integers numbers* yang disimbolkan dengan $\mathbb{Z}$.

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Pada bahasan selanjutnya akan dibahas mengenai operasi hitung pada bilangan bulat dan sifat yang berlaku pada operasi hitung bilangan bulat.

d) Bilangan rasional

Pada capaian pembelajaran bilangan di sekolah dasar, peserta didik tidak hanya mempelajari terkait bilangan asli, bilangan cacah, ataupun bilangan bulat. Tetapi, pada suatu kondisi, peserta didik pun akan menemui permasalahan, misalkan pada suatu keadaan guru membawa 3 roti untuk dibagi kepada 6 siswa, maka setiap anak akan mendapatkan $\frac{3}{6}$

atau $\frac{1}{2}$ bagian. Apabila diperhatikan 1, 2, 3, dan 6 merupakan anggota dari himpunan bilangan bulat. $\frac{3}{6}$ dan $\frac{1}{2}$ memiliki nilai yang sama sehingga dapat kita tuliskan $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ dan selanjutnya. Perhatikan contoh yang lain. Misalkan guru memberikan permasalahan pada siswa, misalkan guru ingin agar setiap siswa mendapatkan dua buah permen, guru dapat meminta siswa lain untuk menentukan berapa banyak permen yang dibutuhkan dan berapa banyak siswa yang menerimanya.

Bilangan yang menggambarkan kondisi permasalahan-permasalahan di atas dikenal dengan himpunan bilangan rasional. Himpunan bilangan irasional merupakan bilangan-bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$ (setelah disederhanakan, a dan b tidak memiliki faktor sekutu kecuali 1). Apabila kita perhatikan, bilangan bulat merupakan himpunan bagian dari bilangan rasional.

e) Bilangan irasional

Pernahkah saudara menemukan bilangan ini 3,14285... atau bilangan 1,414213.... Apabila kita ingat 1,414213... adalah nilai dari $\sqrt{2}$, dan 3,14285... merupakan nilai phi (π). Apakah dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan rasional? Ternyata tidak ya. Bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, a dan b anggota bilangan bulat dengan $b \neq 0$ dinamakan Bilangan irasional. Bilangan irasional bukan merupakan bilangan bulat dan juga bukan merupakan bilangan pecahan. Apabila dituliskan dalam bentuk desimal, bilangan itu tidak berbentuk decimal terbatas dan tidak mempunyai pola yang teratur.

f) Bilangan real

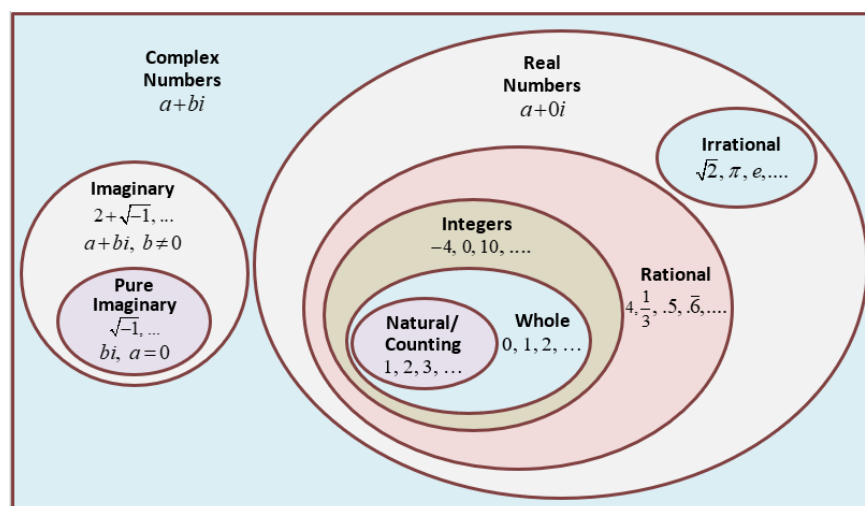
Apabila kita menggambarkan suatu garis bilangan, dan kita korespondensikan 1-1 dengan bilangan rasional, maka ada yang belum memiliki korespondensi, korespondensi tersebut akan penuh dengan pelibatan bilangan irasional. Gabungan antara himpunan bilangan

rasional dengan bilangan irasional kita sebut sebagai bilangan real. Bilangan real dapat dinyatakan dengan lambang $\mathbb{R}$. Setiap bilangan real direpresentasikan secara tunggal pada garis bilangan dan berlaku pula pada kondisi sebaliknya dimana setiap titik pada garis bilangan merepresentasikan sebuah bilangan real.

g) Bilangan kompleks

Bilangan real sering juga disebut dengan bilangan nyata. Masih ingatkan saudara saat mempelajari materi persamaan kuadrat pada jenjang sebelumnya, misalkan, saudara diminta untuk menentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 = -1$, dimana akan kita dapatkan nilai x yang bukan merupakan anggota himpunan bilangan real, melainkan bilangan imajiner atau $i = \sqrt{-1}$. Himpunan bilangan yang melibatkan bilangan imajiner kita sebut dengan himpunan bilangan kompleks. Himpunan bilangan kompleks dapat didefinisikan sebagai pasangan terurut (a, b) dengan $a, b \in \mathbb{R}$ atau $K = \{z | z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Bentuk umum bilangan kompleks adalah $a + bi$.

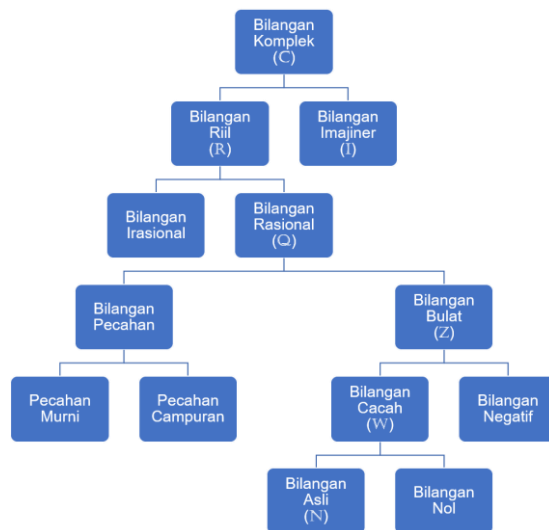
Hubungan antara himpunan bilangan yang telah didiskusikan tampak pada diagram berikut ini:



Gambar 1.3. Sistem bilangan

Sumber <https://mathhints.com/complex-numbers/>

Hubungan tersebut juga dapat dinyatakan melalui diagram berikut



Gambar 1.4. Sistem himpunan bilangan

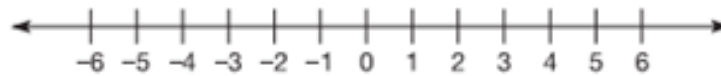
c. Bilangan Bulat dan Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

1) Pengertian Bilangan Bulat

Pada bagian sebelumnya telah sedikit disinggung tentang definisi bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan asli, bilangan nol, dan lawan dari bilangan asli. Bilangan asli tersebut dapat disebut juga bilangan bulat positif. Lawan dari bilangan asli tersebut dapat disebut bilangan bulat negatif.

Himpunan bilangan bulat dapat dituliskan sebagai berikut:

$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$. Pada bagian selanjutnya, bilangan bulat direpresentasikan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan model benda konkret (koin berwarna, kertas berwarna, ataupun tutup botol) dan garis bilangan. Misalkan, pada bagian selanjutnya, model benda konkret yang akan dicontohkan adalah dengan menggunakan koin berwarna dengan aturan bilangan bulat positif akan direpresentasikan dengan koin berwarna hitam, dan bilangan bulat negatif akan direpresentasikan dengan koin berwarna merah. Jika digambarkan dalam garis bilangan, himpunan bilangan bulat adalah sebagai berikut:



Gambar 1.5 Garis bilangan himpunan bilangan bulat

Setelah mengetahui tentang pengertian bilangan bulat, maka tahap selanjutnya adalah akan mempelajari bagaimana nilai tempat bilangan dan contoh penerapannya pada pembelajaran. Selain itu, materi operasi hitung pada bilangan bulat dan penerapannya juga akan dibahas tuntas. Termasuk di dalamnya penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian bilangan bulat serta penerapan pembelajarannya.

2) Konsep Nilai Tempat dan Contoh Penerapan Pada Pembelajaran

Sebelum kita beranjak pada operasi hitung bilangan, maka sebelumnya perlu dipelajari terlebih dahulu mengenai konsep nilai tempat. Konsep nilai tempat berkembang sejak prasekolah hingga SD. Nilai tempat merupakan nilai yang diberikan untuk sebuah angka berdasarkan letak angka tersebut.

Berikut ini contoh kasus pada pembelajaran, khususnya pembelajaran yang dapat guru lakukan dengan menerapkan pembelajaran konstruktivisme (pembelajaran konstruktivisme merupakan sebuah pembelajaran yang membantu peserta didik membangun sendiri pengetahuannya baik berdasarkan pengetahuan dan pengalaman yang telah dimilikinya atau dengan bantuan media dan sarana prasarana yang ada di sekitarnya). Salah satu contoh nyata adalah saat guru ingin mengajak peserta didik membangun pengetahuan tentang konsep nilai tempat, maka hal yang dapat dilakukan oleh guru sebagai berikut:

- a) Guru meminta peserta didik untuk mengumpulkan pensil yang dibawanya.
- b) Guru meminta peserta didik untuk menentukan sebuah bilangan (diharapkan bilangannya adalah puluhan, dengan nilai maksimal sebanyak pensil yang telah dikumpulkan oleh peserta didik, misalkan

peserta didik membilang bahwa pensil di kelas tersebut ada 45, maka bilangan maksimal yang disebutkan oleh peserta didik adalah 45).

- c) Misalkan peserta didik menentukan bilangannya adalah 19, guru meminta peserta didik untuk mengambil pensil sebanyak 19.
- d) Peserta didik diminta oleh guru untuk mengelompokkan 10 pensil dan 9 pensil (guru berdiskusi pada peserta didik mengapa 10 pensil dikelompokkan sendiri, sehingga pada akhirnya diharapkan peserta didik dapat memahami konsep 1 puluhan akan sama nilainya dengan 10 satuan).
- e) Peserta didik diminta membilang ulang dan menentukan nilai tempatnya.

Selain langkah tersebut, masih banyak cara lain yang dapat digunakan oleh guru untuk menerapkan pembelajaran berbasis konstruktivisme pada materi matematika. Langkah di atas hanya merupakan salah satu contoh saja. Guru dapat berinovasi sesuai dengan kreativitasnya masing-masing.

Setelah siswa memahami nilai tempat bilangan yang sederhana, guru dapat melanjutkan pembelajaran dengan bilangan yang lebih besar. Contohnya adalah misalkan terdapat bilangan 1.234, kita akan menentukan nilai tempat dari masing-masing angka tersebut. Kita tahu bahwa 1.234 dapat ditulis menjadi bentuk penjumlahan seperti berikut ini:

$1.234 = 1.000 + 200 + 30 + 4$ atau bentuk tersebut dapat ditulis dengan:

$1.234 = 1_{\text{ribuan}} + 2_{\text{ratusan}} + 3_{\text{puluhan}} + 4_{\text{satuan}}$, dari bentuk penjumlahan tersebut, maka angka 1 memiliki nilai tempat ribuan, angka 2 memiliki nilai tempat ratusan, angka 3 memiliki nilai tempat puluhan, dan angka 4 memiliki nilai tempat satuan. Contoh yang lain adalah kita akan menentukan nilai tempat dari 35.034. Apabila kita perhatikan pada bilangan tersebut terdapat 2 angka 3 yang tentunya memiliki nilai tempat yang berbeda. Seperti pada contoh sebelumnya, 35.034 juga dapat kita tulis menjadi bentuk penjumlahan seperti ini:

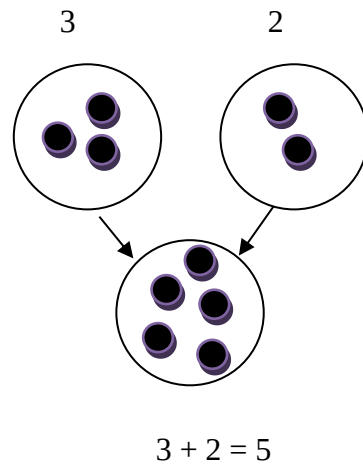
$35.034 = 30.000 + 5.000 + 0 + 30 + 4$, dari bentuk tersebut maka angka 3 yang pertama memiliki nilai tempat puluhan ribu, 5 memiliki nilai tempat ribuan, 0 memiliki nilai tempat ratusan, 3 yang kedua memiliki nilai tempat puluhan dan 4 memiliki nilai tempat satuan. Berdasarkan kedua contoh tersebut, misalkan kita memiliki bilangan $abc.def$ maka untuk menentukan nilai tempat dari bilangan tersebut, dapat dirubah menjadi bentuk:

$abc.def = 100.000a + 10.000b + 1000c + 100d + 10e + f$, dengan kata lain nilai tempat a adalah ratus ribuan, nilai tempat b adalah puluh ribuan, nilai tempat c adalah ribuan, nilai tempat d adalah ratusan, nilai tempat e adalah puluhan dan nilai tempat f adalah satuan.

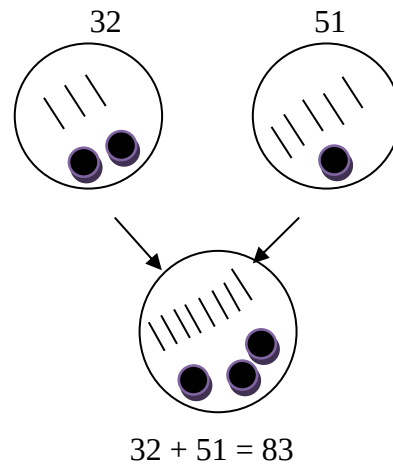
3) Operasi Hitung pada Bilangan Bulat dan Contoh Pembelajarannya

a) Penjumlahan Bilangan Bulat

Misalkan pada awal pembelajaran guru menyiapkan beberapa kartu-kartu yang bertuliskan bilangan-bilangan seperti: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, dan 5. Selain bilangan satuan, terdapat kartu lain yang bertuliskan bilangan seperti 23, 32, 51, dan 83. Selanjutnya siswa akan diminta untuk memilih bilangan-bilangan dan menyelesaikan permasalahan jumlah bilangan yang telah dipilih. Pada bagian pertama, siswa diminta untuk memilih dua bilangan bulat positif, misalkan terpilih 3 dan 2, serta 32 dan 51. Untuk menentukan hasil penjumlahan bilangan-bilangan tersebut, maka siswa dapat kita tuntun untuk menyelesaikannya misalkan dengan koin warna. Perhatikan ilustrasi Gambar 2 dan 3 berikut ini:



Gambar 1.6. Ilustrasi penjumlahan bilangan bulat



Gambar 1.7. Ilustrasi penjumlahan bilangan bulat berdasarkan nilai tempatnya

Sebelum melewati fase seperti Gambar 1.6, pembelajaran yang dilakukan oleh guru dapat menggunakan benda konkret (menurut teori belajar Bruner disebut dengan tahap *enactive*), misalkan guru membawa 3 buah koin berwarna hitam pada mangkok 1 dan 2 buah koin berwarna hitam pada mangkok kedua, dan kemudian guru akan menggabungkannya sehingga koin berwarna hitam yang tersedia ada 5. Setelah peserta didik memahami konsep penjumlahan dengan menggunakan benda konkret, maka tahap selanjutnya guru dapat membantu peserta didik meng gambarkannya melalui gambar koin berwarna hitam (pada teori belajar Bruner disebut dengan tahap *iconic*). Setelah itu peserta didik dapat menuliskan lambang dari bilangannya (atau pada teori Bruner disebut tahap berpikir *symbolic*). Kembali pada Gambar 2 yang menggambarkan (mengilustrasikan) operasi penjumlahan $3 + 2$, berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa pada satu himpunan terdapat 3 anggota dan himpunan yang lain terdapat 2 anggota, sehingga gabungan dari dua himpunan tersebut adalah 5 anggota.

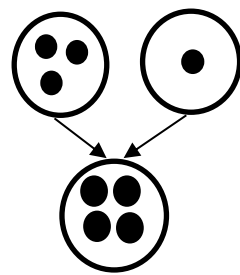
Pada tingkat yang berbeda penanaman konsep penjumlahan dapat dilakukan dengan meminta peserta didik memikirkan jika ada bilangan 15, bilangan tersebut merupakan hasil penjumlahan dari $\dots + \dots$. Permasalahan seperti itu memungkinkan peserta didik memiliki banyak

alternatif solusi untuk satu permasalahan. Contoh yang mungkin peserta didik dapat menjawab $10 + 5$ atau $8 + 7$ atau $15 + 0$ dan sebagainya.

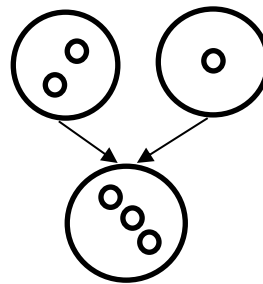
Pada Gambar 1.7 mengilustrasikan $32 + 51$, dimana nilai tempat puluhan diwakili oleh stik dan nilai tempat satuan diwakili oleh koin hitam. Pada ilustrasi tersebut memperlihatkan bahwa untuk menjumlahkan, maka jumlahkanlah sesuai dengan nilai tempat yang sama, yaitu nilai tempat puluhan dengan puluhan ($30 + 50$) dan nilai tempat satuan dengan nilai tempat satuan ($2 + 1$), sehingga hasil akhirnya adalah 83.

Berdasarkan ilustrasi tersebut, jika a dan b adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan $a + b$. Gabungan dari himpunan a dan b diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari a dan b , dengan catatan kedua himpunan tidak memiliki persekutuan.

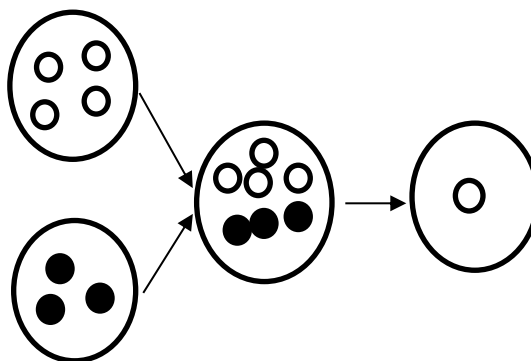
Misalkan guru menyiapkan kartu-kartu yang bertuliskan bilangan -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, dan 4, siswa diminta untuk memilih beberapa kartu. Kemudian dari kartu yang dipilih akan ditentukan jumlah bilangan-bilangan tersebut dengan bantuan koin warna. Guru meminta siswa untuk mengamati bahwa terdapat dua jenis koin warna, yaitu yang berwarna hitam dan berwarna merah. Koin berwarna hitam merepresentasikan bilangan bulat positif dan koin berwarna merah merepresentasikan bilangan bulat negatif dengan ketentuan bahwa pada saat koin berbeda warna digabungkan, maka akan bernilai netral atau 0. Perhatikan Gambar 1.4 berikut ini yang mengilustrasikan penjumlahan bilangan bulat positif dengan positif, penjumlahan bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif dan penjumlahan bilangan positif dengan bilangan bulat negatif dengan menggunakan media konkret sebagai berikut:



a. $3 + 1 = 4$



b. $(-2) + (-1) = (-3)$



c. $(-4) + 3 = -1$

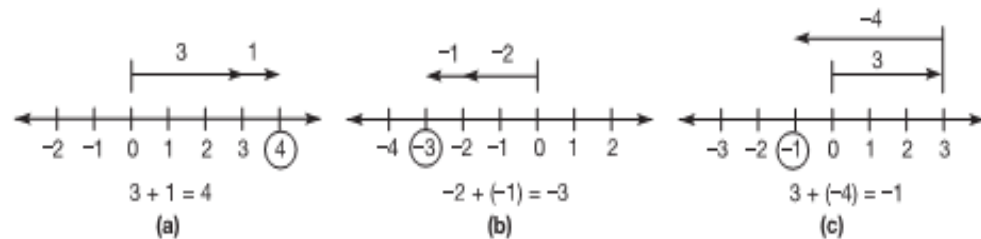
Gambar 1.8. Ilustrasi penjumlahan bilangan bulat positif dengan positif, negatif dengan negatif dan positif dengan negatif

Untuk Gambar 1.8 (a) mengilustrasikan 3 koin hitam digabungkan dengan 1 koin hitam sehingga menjadi 4 koin hitam, atau $3 + 1 = 4$. Ilustrasi ini jika kita kaitkan dengan teori belajar Piaget maka peserta didik kita telah memahami hukum kekekalan bilangan atau banyak.

Untuk Gambar 1.8 (b) mengilustrasikan 2 koin putih akan digabungkan dengan 1 koin putih sehingga menjadi 3 koin merah, atau $(-2) + (-1) = (-3)$. Pada Gambar 1.8 (c) mengilustrasikan 4 koin putih digabungkan dengan 3 koin hitam (ketentuan menyebutkan bahwa pada saat koin berbeda warna digabungkan akan bernilai 0), sehingga hanya menyisakan 1 koin putih, atau $(-4) + 3 = -1$.

Seperti pada penjumlahan bilangan yang lain, pada penjumlahan bilangan bulat dapat diilustrasikan sebagai perpindahan sepanjang garis bilangan. Suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri.

Operasi hitung penjumlahan diilustrasikan dengan langkah maju dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini:



Gambar 1.9. Ilustrasi penjumlahan bilangan menggunakan garis bilangan

Pada Gambar 1.9 (a) untuk mengilustrasikan $3 + 1$, maka dari titik 0 akan bergerak ke arah kanan 3 langkah, kemudian bergerak maju tetap ke arah kanan 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik 4, atau $3 + 1 = 4$. Pada ilustrasi ini peserta didik sudah memahami konsep hukum kekekalan panjang.

Pada Gambar 1.9 (b) untuk mengilustrasikan $(-2) + (-1)$, dari titik 0 akan bergerak maju ke arah kiri 2 langkah, kemudian bergerak maju lagi (tetap ke arah kiri) 1 langkah, sehingga akan berakhir di titik -3, atau $(-2) + (-1) = -3$. Pada Gambar 1.9 (c) untuk mengilustrasikan $3 + (-4)$, dari titik 0 bergerak maju ke arah kanan 3 langkah kemudian bergerak maju ke arah kiri (berbalik arah) sebanyak 4 langkah, sehingga akan berakhir di titik -1, atau $3 + (-4) = -1$.

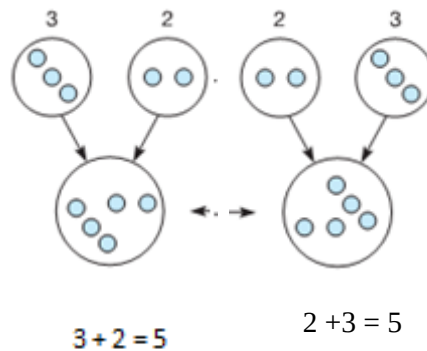
Adapun, beberapa sifat penjumlahan bilangan bulat diantaranya:

1) Sifat Tertutup

Jika a dan b anggota himpunan bilangan bulat, maka $a + b$ juga anggota himpunan bilangan bulat.

2) Sifat Pertukaran (Komutatif)

Jika a dan b anggota bilangan bulat maka $a + b = b + a$

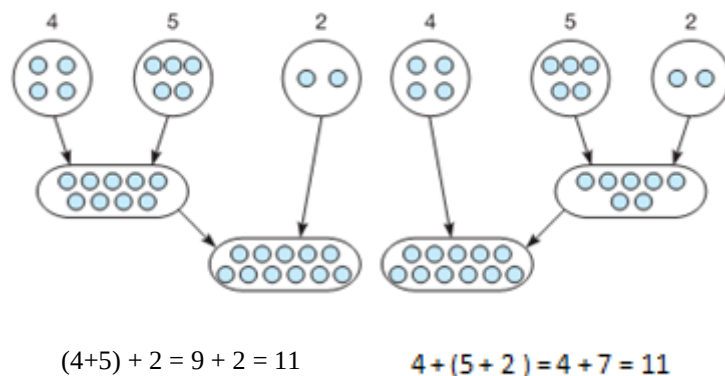


Gambar 1.10. Ilustrasi pembuktian sifat komutatif pada penjumlahan bilangan bulat

3) Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Jika a, b dan c anggota bilangan bulat, maka:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$



Gambar 1.11. Ilustrasi pembuktian sifat asosiatif pada penjumlahan bilangan bulat

4) Memiliki unsur identitas

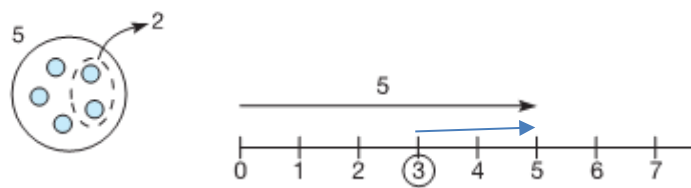
Ada bilangan 0 sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk semua a anggota bilangan bulat.

5) Memiliki invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap bilangan bulat a , terdapat bilangan bulat $(-a)$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

b) Pengurangan Bilangan Bulat

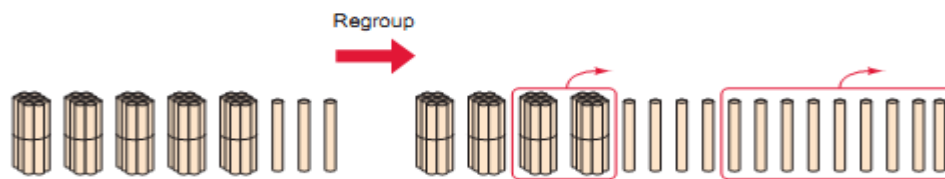
Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau $(a - b = c)$ operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$. Untuk menjelaskan operasi hitung pengurangan, perhatikan ilustrasi Gambar 1.11 berikut ini:



Gambar 1.12. Ilustrasi pengurangan bilangan bulat positif

Gambar 1.12 mengilustrasikan bahwa kita memiliki 5 koin, dan akan memberikan 2 koin kepada teman, berapakah sisa koin yang dimiliki? Pada saat memiliki 5 koin dan akan diberikan 2 koin maka sisa yang dimiliki adalah 3, atau $5 - 2 = 3$. Dengan menggunakan garis bilangan (perlu diperhatikan aturan yang telah disepakati pada operasi hitung penjumlahan) berlaku, suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri, dan operasi hitung pengurangan diilustrasikan dengan langkah mundur. Untuk mengilustrasikan $5 - 2$, dari titik 0, bergerak maju sebanyak 5 langkah ke titik 5, kemudian mundur 2 langkah, sehingga berakhir di titik 3, atau $5 - 2 = 3$.

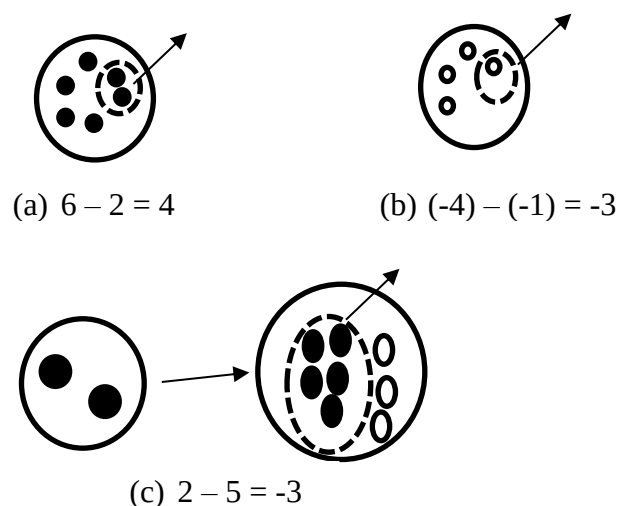
Untuk operasi hitung pengurangan melibatkan nilai tempat puluhan, perhatikan ilustrasi gambar berikut ini:



Gambar 1.13. Ilustrasi pengurangan bilangan melibatkan nilai tempat

Gambar 1.13 di atas mengilustrasikan pengurangan $53 - 29$. Gambar tersebut merupakan salah satu cara yang dapat dilakukan oleh peserta didik dengan bantuan stik es krim ataupun stik lidi. Satu ikat lidi yang terdiri dari 10 lidi melambangkan nilai tempat puluhan, dan satu lidi melambangkan nilai tempat satuan. Untuk mengilustrasikan $53 - 29$, maka terdapat 5 ikat lidi puluhan dan 3 lidi satuan, dari kumpulan lidi tersebut akan diminta 2 ikat lidi puluhan dan 9 lidi satuan. Untuk memudahkan, 1 ikat lidi satuan akan dipecah menjadi 10 lidi satuan, sehingga menjadi 4 ikat lidi puluhan dan 13 lidi satuan. Setelah diminta maka akan tersisa 2 ikat lidi puluhan dan 4 lidi satuan atau $53 - 29 = 24$.

Pengurangan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif diilustrasikan pada gambar 10 berikut ini:



Gambar 1.14. Ilustrasi pengurangan bilangan bulat

Pada Gambar 1.14 di atas, bilangan bulat positif diwakilkan oleh koin berwarna hitam, dan bilangan negatif diwakilkan oleh koin berwarna putih. Gambar 1.14 (a) mengilustrasikan terdapat 6 koin hitam kemudian akan diambil 2 koin hitam, sehingga sisanya adalah 4 koin hitam, atau $6 - 2 = 4$. Gambar 1.14 (b) mengilustrasikan terdapat 4 koin putih kemudian akan diambil 1 koin putih, sehingga sisanya adalah 3 koin putih, atau $(-4) - (-1) = (-3)$. Gambar 1.14 (c) mengilustrasikan terdapat 2 koin hitam, tetapi akan diambil 5 koin hitam. Karena koin hitam tidak mencukupi maka akan disediakan lagi 3 koin hitam, dan agar bernilai netral maka juga disediakan 3 koin putih, sehingga sisa koinnya adalah 3 koin merah, atau $2 - 5 = -3$.

Setelah siswa memahami proses operasi hitung pengurangan, siswa dapat kita minta untuk menyelesaikan operasi hitung seperti pada contoh sebagai berikut:

$$3 + 2 = \dots$$

$$3 - 2 = \dots$$

$$3 + (-2) = \dots$$

$$3 - (-2) = \dots$$

$$(-3) + 2 = \dots$$

$$(-3) - 2 = \dots$$

$$(-3) + (-2) = \dots$$

$$(-3) - (-2) = \dots$$

Setelah siswa menuliskan jawabannya, guru akan meminta siswa mencari hasil yang sama, seperti berikut ini:

$3 + 2 = 5$	$\rightarrow$	$3 - 2 = 1$
$3 + (-2) = 1$	$\rightarrow$	$3 - (-2) = 5$
$(-3) + 2 = -1$	$\rightarrow$	$(-3) - 2 = -5$
$(-3) + (-2) = -5$	$\rightarrow$	$(-3) - (-2) = -1$

Dari hasil tersebut siswa akan menyimpulkan bahwa:

$$3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

$$(-3) - (-2) = (-3) + 2 = -1$$

$$3 - 2 = 3 + (-2) = 1$$

$$(-3) - 2 = (-3) + (-2) = -5$$

Catatan: proses mengamati ini tidak cukup hanya dengan satu set contoh seperti di atas.

Simpulan akhir yang diharapkan dari siswa adalah $a - b = a + (-b)$ dan $a - (-b) = a + b$. Jadi, pada operasi hitung pengurangan berlaku definisi, misalkan a dan b bilangan bulat, maka $a - b$ adalah sebuah bilangan bulat c yang bersifat $b + c = a$. Dapat disimpulkan bahwa $a - b = c$ jika dan hanya jika $a = b + c$. Jika a dan b bilangan bulat, maka $a - b = a + (-b)$.

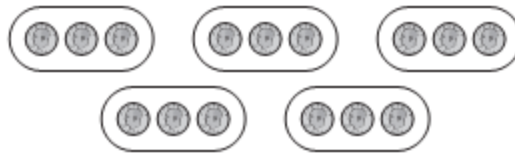
Jika pada operasi hitung penjumlahan berlaku sifat komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas dan memiliki unsur invers, menurut Anda apakah pada operasi hitung pengurangan memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

Sebagai ilustrasi pada sifat komutatif atau sifat pertukaran, jika pada operasi hitung pengurangan pada bilangan bulat berlaku sifat tersebut, maka haruslah berlaku $a - b = b - a$. Dengan menggunakan contoh penyangkalan $5 - 3 = 2$, dan $3 - 5 = -2$, hal tersebut menunjukkan bahwa pada operasi pengurangan tidak berlaku sifat komutatif.

Untuk sifat yang lain silahkan dianalisis apakah berlaku atau tidak.

c) Perkalian Bilangan Bulat

Pada hakikatnya perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang. Salah satu kasus sederhana yaitu, terdapat lima buah keranjang, dimana setiap keranjang terdapat 3 butir telur. Berapa banyak telur seluruhnya? Permasalahan tersebut dapat diilustrasikan seperti gambar di bawah ini:



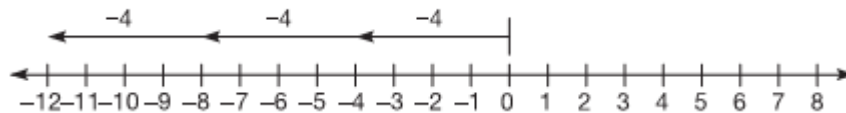
Gambar 1.15. Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan himpunan

Berdasarkan Gambar 1.15 di atas, jumlah seluruh telur adalah $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, atau terdapat 5 kelompok dengan anggota masing-masing 3 dilambangkan dengan $5 \times 3 = 15$. Secara sederhana, dapat juga diilustrasikan pada garis bilangan seperti berikut ini:



Gambar 1.16. Ilustrasi perkalian bilangan bulat positif menggunakan garis bilangan

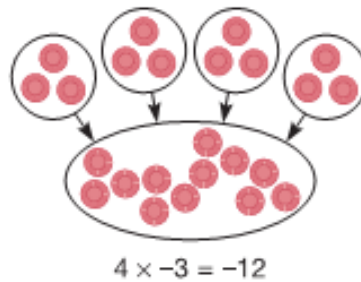
Gambar 1.16 di atas menggambarkan $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ atau $5 \times 3 = 15$. Berikutnya, Perhatikan ilustrasi garis bilangan berikut ini:



Gambar 1.17. Ilustrasi perkalian bilangan bulat negatif menggunakan garis bilangan

Garis bilangan pada Gambar 1.17 tersebut menyatakan: $(-4) + (-4) + (-4) = 3 \times (-4) = -12$.

Contoh yang lain adalah menggunakan koin muatan, dimana koin berwarna merah memiliki nilai negatif. Pada setiap kelompok terdapat 3 koin merah (3 koin bernilai negatif), dan terdapat 4 kelompok. Secara matematis ditulis $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) = 4 \times (-3) = -12$.



Gambar 1.18. Ilustrasi perkalian bilangan bulat negatif menggunakan himpunan

Beberapa contoh sebelumnya adalah perkalian dua bilangan bulat positif dan perkalian bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif. Bagaimana untuk perkalian bilangan bulat negatif dan bilangan bulat negatif?

Perhatikan pola perkalian bilangan berikut ini:

$$\begin{array}{rcl}
 (-3) \times 3 & = & -9 \\
 (-3) \times 2 & = & -6 \\
 (-3) \times 1 & = & -3 \\
 (-3) \times 0 & = & 0 \\
 (-3) \times (-1) & = & ? \\
 (-3) \times (-2) & = & ? \\
 (-3) \times (-3) & = & ?
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3 \\
 \downarrow +3
 \end{array}$$

Jika diperhatikan pola tersebut (pada bagian hasil) semakin bertambah 3, sehingga $(-3) \times (-1) = 3$, $(-3) \times (-2) = 6$, $(-3) \times (-3) = 9$. *Coba Anda buat contoh lain dengan bilangan yang berbeda! Simpulan apa yang Anda dapatkan?* Dari beberapa contoh tersebut, diperoleh sebuah aturan sebagai berikut:

$$(1) -a \times b = -(a \times b)$$

$$(2) -a \times -b = a \times b$$

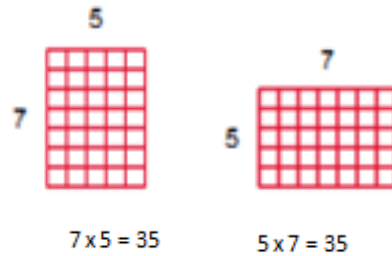
Adapun beberapa sifat perkalian bilangan bulat adalah sebagai berikut:

1) Sifat Tertutup

Jika a dan b anggota himpunan bilangan bulat, maka $a \times b$ juga anggota himpunan bilangan bulat. Bentuk umum $a \times b$ dapat dinyatakan dengan ab .

2) Sifat Komutatif

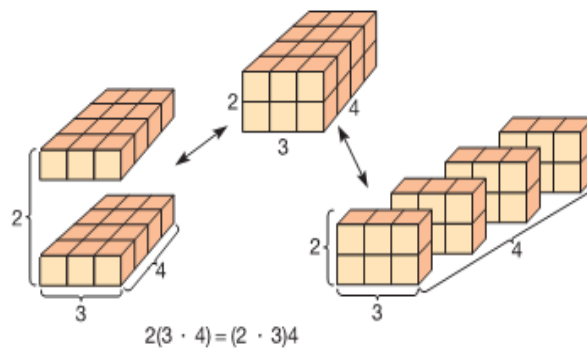
Jika a dan b anggota bilangan bulat maka $ab = ba$



Gambar 1.19 Ilustrasi sifat komutatif pada operasi hitung perkalian

3) Sifat Asosiatif

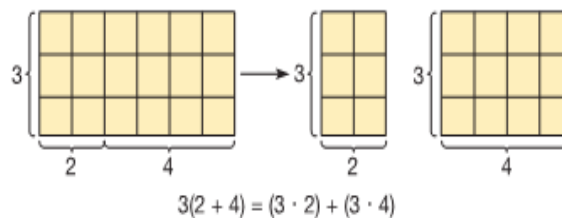
Jika a , b dan c anggota bilangan bulat, maka $(ab) \times c = a \times (bc)$



Gambar 1.20 Ilustrasi sifat asosiatif pada operasi hitung perkalian

4) Sifat Distributif

Jika a , b , c anggota himpunan bilangan bulat, maka $a(b+c) = ab+ac$



Gambar 1.21 Ilustrasi sifat distributive perkalian terhadap penjumlahan

5) Memiliki Unsur Identitas

Ada bilangan 1 sedemikian sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$, untuk semua a anggota bilangan bulat.

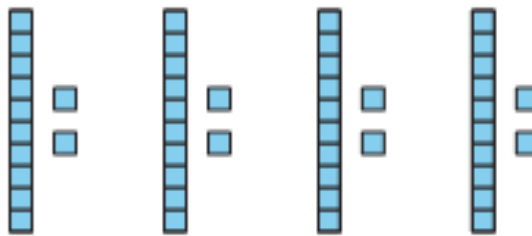
d) Pembagian Bilangan Bulat

Pada hakikatnya operasi hitung pembagian pada dua buah bilangan bulat positif adalah pengurangan yang berulang sampai nol. Definisi ini hanya berlaku saat bilangan yang dibagi habis dibagi oleh bilangan pembagi. Perhatikan contoh kasus berikut ini:

Berapakah $48 : 4$?

Perhatikan 3 ilustrasi penyelesaian berikut ini:

a.



Gambar 1.22 (a) Ilustrasi pembagian $48 : 4$

Gambar 1.22 (a) tersebut mengilustrasikan 48 memiliki nilai tempat puluhan 4 dan nilai satuan 8. Karena akan dibagi pada 4 kelompok, maka setiap kelompok memiliki 1 puluhan, dan 2 satuan, atau dengan kata lain $48 : 4 = 12$.

b.



Gambar 1.22 (b) Ilustrasi pembagian $48 : 4$

Ilustrasi pada Gambar 1.22 (b) tersebut menggambarkan setiap kelompok memiliki 4 kotak, dengan menerapkan prinsip pengurangan yang berulang maka akan terdapat 12 kelompok (melakukan pengurangan 4 sampai habis sebanyak 12 kali) atau dengan kata lain $48 : 4 = 12$.

Adapun ilustrasi dengan menggunakan tabel adalah sebagai berikut:

Tabel 1.1. Penyelesaian Pembagian $48 : 4$

Kel 1	Kel 2	Kel 3	Kel 4	Jumlah
10	10	10	10	40
1	1	1	1	4
1	1	1	1	4
12	12	12	12	48

Salah satu cara lain yang dapat dilakukan adalah mencoba membuat daftar atau tabel berapa banyak pada setiap kelompok. Dari tabel tersebut dapat disimpulkan setiap kelompok adalah 12. Jadi dapat disimpulkan bahwa $48 : 4 = 12$. Berdasarkan tiga ilustrasi penyelesaian di atas, menunjukkan bahwa hasil dari $48 : 4 = 12$.

Definisi:

Untuk setiap a dan b anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

Jika pada operasi hitung perkalian berlaku sifat komutatif, asosiatif, distributif, dan memiliki unsur identitas, menurut Anda apakah pada operasi hitung pembagian memiliki sifat yang sama? Jika tidak mengapa?

c. Bilangan Pecahan dan Operasi Hitung Pada Bilangan Pecahan

1) Pengertian Bilangan Pecahan

Salah satu materi yang dirasa cukup memiliki hambatan belajar adalah bilangan pecahan. Di awal pembelajaran kita dapat memberikan ilustrasi permasalahan sederhana agar siswa dapat mengkonstruksi pemahaman tentang definisi bilangan pecahan.

Misalnya guru mengorientasi siswa dengan beberapa permasalahan seperti berikut ini. Bu Budi membawa 21 buah strawberry ke kelas untuk 7 siswa yang datang tepat waktu. Bu Budi merencanakan setiap siswa akan

menerima sama banyaknya, menurut kalian masing-masing siswa akan mendapat berapa strawberry?

Selain membawa buah strawberry, Bu Budi juga membawa satu roti sobek yang akan dibagikan kepada 4 siswa yang dapat menyelesaikan tugas paling awal. Bu Budi akan membaginya sama rata, menurut kalian setiap siswa akan mendapatkan berapa bagian dari roti sobek tersebut?

Permasalahan pertama untuk siswa yang datang tepat waktu, dapat kita demonstrasikan dengan proses membagi sampai habis atau operasi hitung pembagian. Sehingga setiap siswa mendapatkan 3 buah strawberry.

Permasalahan kedua merupakan tantangan baru bagi siswa. bagaimana menentukan besar bagian yang didapat masing-masing siswa. Guru dapat memancing siswa dengan pertanyaan, apakah setiap siswa harus mendapat bagian yang sama banyak? Tentu saja iya. Bagaimana membaginya? Guru bersama siswa demonstrasi membagi menjadi roti tersebut menjadi 4 bagian sama besar, dimulai dari membagi 2 terlebih dahulu kemudian mebagi 2 lagi setiap bagiannya. Atau guru dapat mengeksplorasi cara yang lain. Sehingga siswa akan dapat menyimpulkan, setiap siswa yang menyelesaikan tugas paling awal akan mendapatkan 1 bagian dari 4 bagian kue. Setelah siswa memahami, siswa dikenalkan dengan lambang bilangannya.

Selain kedua contoh permasalahan tersebut, perhatikan pula contoh berikut ini:

- a) Ani memiliki 15 buah apel yang akan dibagikan kepada 5 orang temannya dan setiap temannya akan mendapat bagian yang sama. Berapa buah apel diterima oleh setiap teman Ani?
- b) Silvia memiliki 1 buah semangka yang akan dibagikan kepada 4 orang temannya, dan Silvia menginginkan temannya mendapatkan bagian yang sama besar, bagaimana cara Silvia membaginya dan berapa besar semangka yang diperoleh teman Silvia?

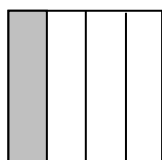
Contoh a) merupakan masalah yang mudah diselesaikan oleh peserta didik yang sudah menguasai operasi pembagian bilangan asli, yaitu $15 : 5 = 3$.

Untuk masalah nomor b) kemungkinan ada peserta didik akan menjawab “tidak bisa”. Jika hal seperti ini terjadi berarti peserta didik tersebut belum belajar atau belum memahami pengertian bilangan pecahan. Untuk mengilustrasikan permasalahan tersebut guru dan peserta didik dapat melakukan kegiatan sebagai berikut: Guru menunjukkan satu buah semangka kepada peserta didik kemudian memotong buah semangka itu menjadi empat bagian sama besar. Guru bertanya kepada peserta didik, ada berapa potongan buah semangka seluruhnya sekarang? Peserta didik akan menjawab empat potong. Guru menunjukkan satu potongan buah semangka itu kepada peserta didik dan bertanya, ada berapa potongan buah semangka? Peserta didik menjawab 1 potong. Selanjutnya guru menyatakan bahwa bagian semangka yang ditunjukkannya adalah 1 dari keseluruhan atau 1 dari 4, dan ditulis dengan $\frac{1}{4}$.

Untuk membantu menanamkan konsep pecahan dapat dilakukan dengan bantuan media berupa benda konkret dan gambar. Untuk permulaan dapat dipilih benda dan gambar yang memiliki karakteristik dekat dengan peserta didik, bentuk yang teratur dan mudah dibayangkan oleh peserta didik. Konsep bilangan pecahan dapat dihubungkan dengan konsep besar (luas), panjang, maupun himpunan. Perhatikan ilustrasi berikut: Guru memperlihatkan gambar yang mewakili bilangan 1 dan gambar yang mewakili bilangan $\frac{1}{4}$. Sebagai berikut:

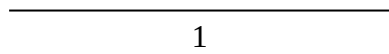


Luas daerah keseluruhan mewakili bilangan 1

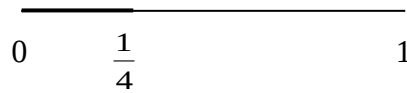


Luas daerah yang diarsir mewakili bilangan $\frac{1}{4}$

Kita dapat memperlihatkan luas daerah yang mewakili bilangan 1 dan luas daerah yang mewakili bilangan $\frac{1}{4}$.

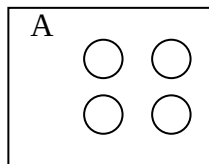


Satu satuan panjang yang mewakili bilangan 1

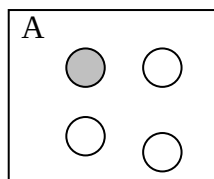


Lambang untuk panjang bagian yang diarsir adalah $\frac{1}{4}$.

Bilangan pecahan dapat diilustrasikan sebagai perbandingan himpunan bagian yang sama dari suatu himpunan terhadap keseluruhan himpunan semula. Guru memperlihatkan gambar himpunan sebagai berikut:



Banyak anggota himpunan A adalah 4.

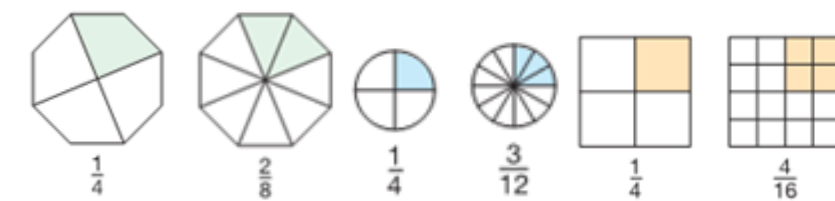


Jika himpunan A dibagi menjadi himpunan-

himpunan bagian yang sama, maka setiap himpunan bagian mempunyai satu anggota dan dibandingkan dengan himpunan A adalah $\frac{1}{4}$.

2) Bilangan Pecahan Senilai

Perhatikan ilustrasi berikut ini!



Gambar 1.23. Ilustrasi pecahan bernilai $\frac{1}{4}$

Gambar 1.23 tersebut menggambarkan bagian yang sama dari bagian yang diarsir tetapi dengan pembagi yang berbeda. Berdasarkan Gambar 1.23 maka $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}, \frac{1}{4} = \frac{3}{12}, \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ atau $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$. Bilangan-bilangan

pecahan senilai adalah bilangan-bilangan pecahan yang cara penulisannya berbeda tetapi mempunyai hasil bagi yang sama, atau bilangan-bilangan itu mewakili daerah yang sama, atau mewakili bagian yang sama.

3) Bilangan Pecahan Murni, Senama, dan Campuran

a) Bilangan Pecahan Murni

Bilangan pecahan murni disebut juga bilangan pecahan sejati adalah bilangan pecahan yang paling sederhana (tidak dapat disederhanakan lagi).

Contoh bilangan murni antara lain $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, dan $\frac{5}{7}$.

b) Bilangan Pecahan Senama

Bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut sama dinamakan bilangan-bilangan pecahan senama. Contoh bilangan pecahan senama

antara lain: $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$, dan $\frac{4}{6}$.

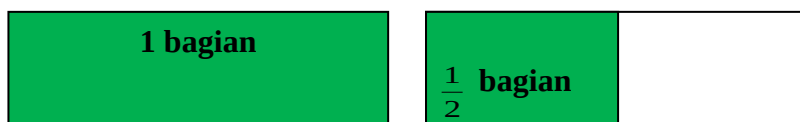
c) Bilangan Pecahan Campuran.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 1.24. Pecahan campuran

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah $\frac{3}{2}$ bagian.



Gambar 1.25. Pecahan Campuran

Bagian yang diarsir dari seluruh gambar di atas adalah 1 bagian ditambah $\frac{1}{2}$ bagian atau $1\frac{1}{2}$ bagian. Gambar 1.24 dan Gambar 1.25 adalah dua gambar yang sama. Bagian yang diarsir pada Gambar 1.24 dan bagian yang

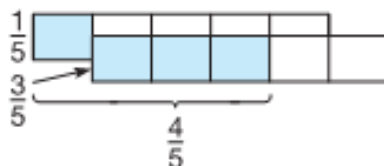
diarsir pada Gambar 1.25 menunjukkan luas daerah yang sama. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$.

4) Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan

a) Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Sama.

Untuk membantu siswa dalam memahami bagaimana proses operasi hitung penjumlahan dan pengurangan dapat dimulai dengan memberikan permasalahan yang sederhana. Perhatikan ilustrasi berikut ini, misalkan pada pagi hari Firman memakan $\frac{1}{5}$ bagian roti sisir, kemudian siang harinya Firman kembali makan roti sisir tersebut $\frac{3}{5}$ bagian roti sisir, berapa bagian roti sisir yang telah dimakan oleh Firman?

Permasalahan tersebut, apabila dituliskan dalam bentuk matematis menjadi $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$. Untuk mencari solusi permasalahan tersebut, kita dapat menggambarannya seperti pada gambar berikut:



Gambar 1.26 Ilustrasi penjumlahan bilangan pecahan berpenyebut sama

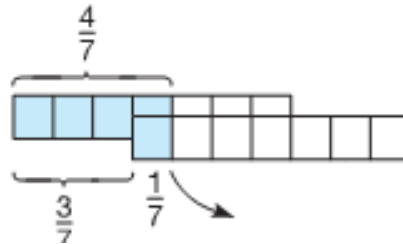
Pada Gambar 1.26 tersebut nampak jelas luas bagian yang diarsir sama. Karena luas bagiannya telah sama, maka kita dapat menggabungkan bagian-bagian yang diarsir, sehingga dari gambar di atas, tampak bahwa $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Selanjutnya, perhatikan permasalahan berikut ini.

Ibu memotong kue yang dimilikinya menjadi 7 bagian yang sama. Kemudian ibu memberikan 4 bagian dari 7 bagian tersebut kepada kakak. Pada malam harinya kakak memakan 3 bagian kue tersebut. Berapa bagian kah sisa kue kakak?

Permasalahan tersebut dapat kita tuliskan menjadi bentuk matematika seperti berikut ini, $\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \dots$

Untuk mencari hasil pengurangan itu, kita dapat menggambarannya seperti berikut ini:



Gambar 1.27. Ilustrasi pengurangan bilangan pecahan berpenyebut sama

Seperti halnya pada konsep penjumlahan, pada pengurangan bilangan pecahan berpenyebut sama, besar arsirannya sama, sehingga kita dapat mengambil $\frac{3}{7}$ dari $\frac{4}{7}$ bagian yang tersedia, sehingga berdasarkan Gambar 1.27 di atas, tampak bahwa $\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$.

Secara algoritma, permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5} \text{ dan } \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7}.$$

Atau dengan kata lain:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ dan } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

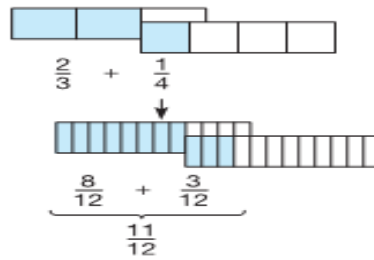
b) Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan Berpenyebut Berbeda

Apabila pada bagian sebelumnya telah didiskusikan penjumlahan dan pengurangan dengan penyebut yang sama, bagaimana jika penyebutnya berbeda? Perhatikan permasalahan berikut ini.

Ibu pulang membawa $\frac{2}{3}$ bagian roti sobek merk A, tidak lama kemudian, Ayah juga pulang membawa $\frac{1}{4}$ bagian roti sobek yang sama seperti yang dibawa Ibu. Berapa bagian kah roti sobek milik Ayah dan Ibu?

Permasalahan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matematika seperti berikut ini $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \dots$.

Untuk mencari solusi dari permasalahan tersebut, perhatikan ilustrasi seperti gambar berikut:



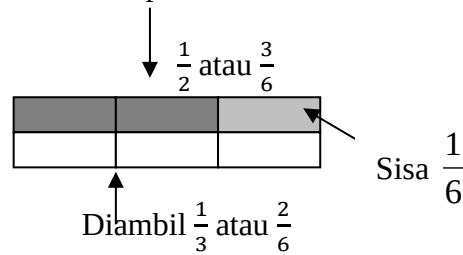
Gambar 1.28 Ilustrasi penjumlahan pecahan berpenyebut berbeda

Berdasarkan Gambar 1.28 tersebut, kita tidak dapat langsung menjumlahkan kedua bilangan pecahan dikarenakan “luas daerah yang terarsir berbeda”, sehingga yang dapat kita lakukan adalah meminta peserta didik untuk dapat menyamakan luas daerahnya. Langkah yang dapat dilakukan adalah mencari pecahan senilai dari $\frac{2}{3}$ dan $\frac{1}{4}$, pecahan senilai yang dipilih adalah yang memiliki penyebut yang sama. Mengapa demikian? Agar luas daerah yang diarsir untuk kedua pecahan tersebut sama. Selanjutnya pecahan $\frac{8}{12}$ dan $\frac{3}{12}$ (dapatkah kita memilih pecahan yang lain?). Melalui bimbingan guru diharapkan peserta didik dapat menyimpulkan bahwa agar penyebutnya sama, maka peserta didik akan mencari KPK dari kedua atau lebih penyebut tersebut. Setelah penyebut kedua bilangan pecahan tersebut sama, maka peserta didik akan mengingat lagi prosedur untuk penjumlahan berpenyebut sama.

Selanjutnya, perhatikan permasalahan berikut ini. Kakak melihat ada $\frac{1}{2}$ loyang bagian kue brownies, sampai malam hari, kakak telah memakan $\frac{1}{3}$ bagian kue tersebut, berapakah sisa kue kakak?

Permasalahan tersebut apabila dituliskan dalam bentuk matematika menjadi $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \dots$.

Untuk mencari hasil dari permasalahan tersebut, kita dapat menggunakan ilustrasi seperti berikut:



Melalui penggunaan konsep yang sama seperti penjumlahan bilangan pecahan berpenyebut berbeda, dari gambar di atas, maka $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

Penyelesaian tersebut jika kita terapkan dalam pembelajaran, maka langkah yang dapat kita lakukan adalah:

- Meminta peserta didik untuk mengingat kembali konsep penjumlahan atau pengurangan.
- Melalui bantuan persegi satuan, peserta didik diminta untuk mengarsir atau menentukan besar daerah sesuai dengan bilangan yang telah dipilih.
- Peserta didik mencoba merubah pecahan, jika besar daerah pembaginya belum sama.
- Peserta didik mencoba memahami bahwa konsep pecahan senilai adalah konsep awal atau prasyarat untuk penjumlahan ataupun pengurangan bilangan pecahan berpenyebut beda.
- Peserta didik mengamati beberapa pola penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan berpenyebut berbeda (diharapkan setelah memahami pecahan senilai, maka kesimpulan selanjutnya adalah peserta didik mengetahui bahwa agar penyebut kedua atau

lebih pecahan sama bisa dicari dengan menentukan KPK penyebutnya).

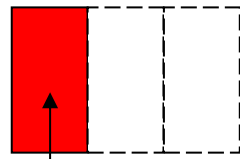
- f. Peserta didik dengan bimbingan guru menyimpulkan konsep atau aturan untuk penjumlahan dan pengurangan bilangan pecahan berpenyebut berbeda, yaitu jika penyebutnya belum sama maka langkah awal yang dilakukan adalah dapat mencari pecahan senilai dari masing-masing pecahan sampai penyebutnya sama, atau dapat mencari KPK dari penyebutnya.

5) Perkalian Bilangan Pecahan

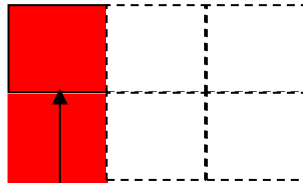
a) Perkalian Bilangan Pecahan

Mari kita perhatikan contoh berikut ini. Ibu mendapatkan pesanan 6 box nasi, yang diantaranya berisi telur $\frac{1}{2}$ bagian, berapa total telur yang dibutuhkan ibu? Secara matematis dapat kita tuliskan $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$. Apabila kita perhatikan, bentuk tersebut dijabarkan dari proses penjumlahan yang berulang.

Dari contoh-contoh permasalahan yang dapat kita berikan pada siswa, siswa dapat menyelesaikan permasalahan serupa dengan merubahnya menjadi penjumlahan berulang seperti pada perkalian bilangan asli. Nah, bagaimana dengan perkalian dua bilangan pecahan? Perhatikan contoh kasus berikut ini: “Ibu memiliki $\frac{1}{3}$ bagian kue, kemudian adik meminta $\frac{1}{2}$ bagian kue yang dimiliki ibu, berapa bagian kue yang diminta adik?” Ilustrasi cerita tersebut ditunjukkan seperti gambar berikut ini:



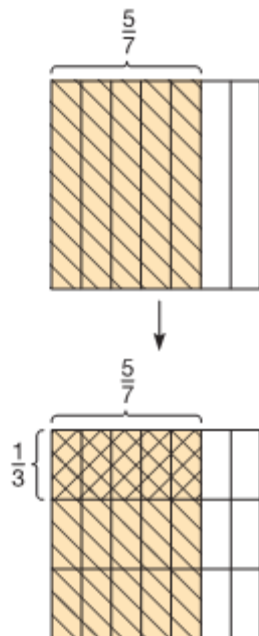
Mewakili kue milik ibu $\frac{1}{3}$ bagian.



Mewakili kue yang diminta oleh adik $\frac{1}{2}$ bagian dari milik ibu.

Dari gambar tersebut terlihat bahwa adik sekarang memiliki $\frac{1}{2}$ bagian dari $\frac{1}{3}$ bagian kue atau senilai dengan $\frac{1}{6}$ bagian kue. Secara matematis hal tersebut menggambarkan $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Perhatikan contoh selanjutnya!



Gambar di samping mengilustrasikan $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$.

Ilustrasi gambar tersebut adalah sebagai berikut:

Misalkan Ani memiliki kertas yang diarsir $\frac{5}{7}$ bagian

dan $\frac{1}{3}$ bagian dari kertas milik Ani diminta oleh

Dini, berapa bagian kertas yang diminta Dini?

Besar bagian yang diminta adalah $\frac{1}{3}$ bagian dari $\frac{5}{7}$

bagian atau $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7}$.

Bahasan selanjutnya adalah perkalian pecahan yang melibatkan pecahan campuran, perhatikanlah gambar berikut ini!

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$2\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{2} = (2 \times 3) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) +$$

$$\left(\frac{2}{3} \times 3\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) =$$

$$6 + 1 + 2 + \frac{1}{3} = 9\frac{1}{3}$$

Dari beberapa kasus yang telah disajikan maka dapat didefinisikan:

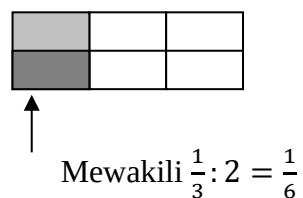
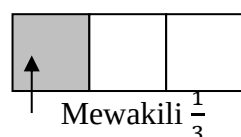
Jika a, b, c, d adalah anggota himpunan bilangan bulat, maka

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

6) Pembagian Bilangan Pecahan

Perhatikan contoh berikut ini, Bu Ica membawa $\frac{1}{3}$ bagian roti sobek yang akan diberikan kepada kedua anaknya, berapa bagiankah masing-masing roti yang didapat kedua anak Bu Ica? Permasalahan tersebut dapat dituliskan menjadi $\frac{1}{3} : 2 = \dots$.

Permasalahan tersebut tidak dapat diselesaikan seperti pada pembagian bilangan asli. Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini:



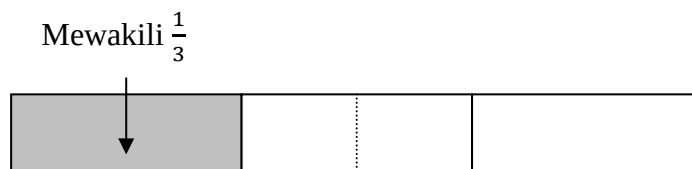
Perhatikan contoh yang lain. Ayah membawa 1kg anggur untuk ketiga anaknya, berapa kilo anggurkah yang diterima masing-masing anak? Permasalahan tersebut dapat dituliskan menjadi $1 : \frac{1}{3}$. Untuk menyelesaikan permasalahan itu dapat digunakan definisi sebagai berikut:

$a : b = n$ jika dan hanya jika $n \times b = a$

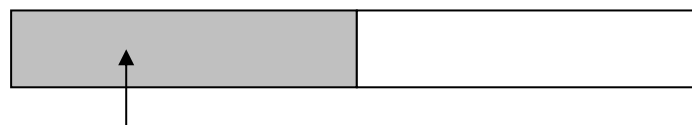
Melalui definisi tersebut, akan kita coba menyelesaikan masalah berikut ini:

$1 : \frac{1}{3} = \dots$, artinya $\dots \times \frac{1}{3} = 1$, atau sama dengan berapa kali $\frac{1}{3}$ agar sama dengan 1. Akhirnya, kita dapat menemukan bahwa: $1 : \frac{1}{3} = 3$ karena $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Permasalahan yang lain misalkan siswa diminta untuk menentukan $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, perhatikan ilustrasi gambar berikut ini!



Gambar 1.30



Gambar 1.31

Mewakili $\frac{1}{2}$

Dari Gambar 1.30 dan Gambar 1.31 di atas tampak bahwa kita memerlukan $1\frac{1}{2}$ kali bidang yang diarsir pada Gambar 1.30 agar dapat tepat menutup bidang yang diarsir pada Gambar 1.31.

Jadi dapat disimpulkan, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2}$ karena $1\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Berdasarkan algoritma, masalah pembagian di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

- $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3} : \frac{2}{1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.
- $1 : \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$.
- $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Dari beberapa contoh tersebut, secara algoritma untuk menyelesaikan operasi hitung pembagian bilangan pecahan adalah sebagai berikut:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

7) Pecahan Desimal

a) Angka desimal

Angka decimal atau sering juga disebut dengan pecahan decimal. Mengapa disebut pecahan decimal? Pada dasarnya angka desimal merupakan suatu bentuk pecahan yang berbentuk $\frac{a}{10^n} = a \times 10^{-n}$, dimana a adalah bilangan bulat, dan n adalah bilangan bulat positif. Angka decimal dapat diidentifikasi dengan simbol pemisah decimal “.” atau “,”. Angka decimal yang kita kenal ada berdasarkan banyaknya angka dibelakan koma ada yang decimal terbatas (contoh 0,451) dan desimal tak terbatas (contoh 0,4513...). Angka decimal berulang merupakan decimal dimana setelah nilai suatu tempat tertentu, mengulangi urutan digit yang sama, contoh 0,252525 atau 0,314314...).

Sebelum mempelajari pembelajaran angka desimal, sebelumnya akan didiskusikan terkait nilai tempat pada bilangan decimal.

$\frac{1}{10}$ ditulis 0,1

$\frac{1}{100}$ ditulis 0,01

$\frac{1}{1000}$ ditulis 0,001

$\frac{1}{10000}$ ditulis 0,0001

Apabila pada nilai tempat bilangan asli kita mengenal satuan, puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya, nilai tempat pada bilangan decimal adalah persepuluhan, peratusan, peribuan, dan seterusnya. Angka decimal dapat dituliskan dengan $a \times 10^{-n}$. Misalkan terdapat angka decimal 49,027, yaitu

$$49,027 = (4 \times 10) + (9 \times 1) + (0 \times \frac{1}{10}) + (2 \times \frac{1}{100}) + (7 \times \frac{1}{1000}).$$

b) Mengubah Penulisan Bilangan Pecahan dari Bentuk Biasa ke Desimal dan Sebaliknya

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan desimal dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu: (1) menggunakan bilangan pecahan senama dengan penyebut kelipatan 10, dan (2) menggunakan cara pembagian panjang.

Pada pembelajaran di sekolah dasar, salah satu capaian pembelajarannya adalah merubah bentuk bilangan pecahan dari bentuk pecahan biasa ke bentuk pecahan decimal. Membimbing siswa merubah bentuk tersebut misalkan dengan mengajak siswa menggunakan algoritma pembagian bersusun ke bawah atau mengubah suatu pecahan menjadi berpenyebut 10, 100, 1000 dan seterusnya. Misalkan kita akan membimbing peserta didik merubah bilangan $\frac{7}{8}$ ke dalam bentuk pecahan decimal. Maka kita akan membimbing peserta didik untuk merubah penyebut dari pecahan tersebut menjadi 10, 100, 1000 ataupun 10000. Diharapkan peserta didik mendapatkan hasil:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{875}{1000} = 0,875.$$

Bagaimana dengan pecahan $4\frac{3}{4}$ apabila ingin kita rubah dalam bentuk pecahan decimal? Bentuk pecahan $4\frac{3}{4}$ dapat kita tuliskan menjadi $4 + \frac{3}{4}$.

$$4\frac{3}{4} = 4 + \frac{3}{4} = 4 + \left(\frac{3}{4} \times \frac{25}{25}\right) = 4 + \frac{75}{100} = 4 + 0,75 = 4,75$$

Mengubah penulisan bilangan pecahan dari bentuk pecahan desimal ke bentuk pecahan biasa dapat dilakukan dengan memperhatikan bilangannya. Jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang berhingga, maka kita dapat memanfaatkan sistem nilai tempat; sedangkan jika bilangan yang ditulis sebagai pecahan desimal itu memuat sejumlah bilangan yang tidak berhingga tetapi berulang, maka kita harus memanipulasi bilangan itu sehingga bentuk pecahan desimalnya diperoleh.

Misalkan kita akan merubah 9,078 menjadi pecahan.

$$9,078 = 9 + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{9000}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{9078}{1000}$$

Perhatikan contoh berikut ini 6,525252.... Apabila diperhatikan angka decimal tersebut merupakan angka decimal yang berulang (perhatikan pengulangan angka 39) dan tidak terbatas (perhatikan tanda ...). Untuk merubah angka decimal berulang tak terbatas perhatikan langkah berikut ini.

Misal, $n = 6,52525252\dots$

$$100 n = 652,525252\dots$$

$$\begin{array}{r} n = 6,52525252\dots \\ \hline \end{array} \quad -$$

$$99 n = 646$$

$$n = \frac{646}{99}$$

c) Operasi Pada Bilangan Pecahan Desimal

Sudah kita pelajari bahwa angka decimal dapat kita rubah menjadi bentuk bilangan pecahan. Oleh karena itu pada angka decimal berlaku operasi hitung penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Pada prinsipnya operasi hitung pada angka pecahan juga memperhatikan aturan nilai tempat seperti pada operasi hitung bilangan bulat. Artinya bahwa untuk menjumlahkan dan mengurangkan dua angka decimal, harus diperhatikan nilai tempatnya. Perhatikan contoh di bawah ini!

$$\begin{array}{r} 1. \quad 0,652 = 0 + 0,6 + 0,05 + 0,002 \\ \quad 0,343 = 0 + 0,3 + 0,04 + 0,003 \\ \hline \quad \quad \quad + \\ \quad \quad \quad = 0 + 0,9 + 0,09 + 0,005 \\ \quad \quad \quad = 0 + 0,900 + 0,09 + 0,005 \\ \quad \quad \quad = 0,995 \end{array}$$

Jadi, $0,652 + 0,343 = 0,995$.

$$\begin{array}{r}
2. \quad 0,379 = 0 + 0,3 + 0,07 + 0,009 \\
\quad 0,257 = 0 + 0,2 + 0,05 + 0,007 \\
\hline
\quad \quad \quad + \\
\quad \quad \quad = 0 + 0,5 + 0,12 + 0,016 \\
\quad \quad \quad = 0 + 0,500 + 0,120 + 0,016 \\
\quad \quad \quad = 0,636
\end{array}$$

Jadi, $0,379 + 0,257 = 0,636$.

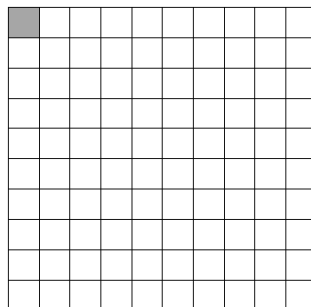
$$\begin{array}{r}
3. \quad 0,875 = 0 + 0,8 + 0,07 + 0,005 \\
\quad 0,324 = 0 + 0,3 + 0,02 + 0,004 \\
\hline
\quad \quad \quad - \\
\quad \quad \quad = 0 + 0,5 + 0,05 + 0,001 \\
\quad \quad \quad = 0,551
\end{array}$$

Jadi, $0,875 - 0,324 = 0,551$.

d. Persen, Perbandingan dan Skala

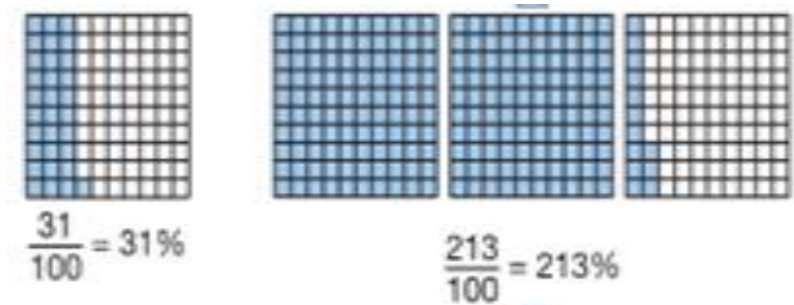
1) Persen

Persen atau persentase atau perseratus merupakan angka yang menyatakan pecahan dari seratus yang dapat menyatakan rasio. Persen disimbolkan dengan “%”.



Mengenalkan atau mengilustrasikan bentuk persen, guru dapat menggunakan media sederhana seperti ini. Persegi yang terdiri dari 100 persegi satuan. 1 persegi satuan menyatakan perseratus atau dilambangkan dengan (%). Satu kotak yang terasir di atas merupakan representasi dari 1%. Jika terdapat 31 persegi satuan yang diarsir, maka melambangkan 31 perseratus atau $\frac{31}{100}$ atau 10%. Apabila terdapat 3 persegi satuan besar,

dengan jumlah 213 persegi satuan kecil yang diarsir maka akan melambangkan 213 perseratus atau $\frac{213}{100} = 2\frac{13}{100}$ atau 213%.



Gambar 1.29. Ilustrasi 31 % dan 213 %.

Angka persen sebagai representasi dari rasio dapat dimaknai dari perbandingan antara dua hal. Misalkan pada suatu ruangan terdapat 50 siswa sekolah dasar, dimana 30 orang diantaranya adalah berjenis kelamin perempuan, maka dapat dinyatakan bahwa persentase siswa sekolah dasar yang berjenis kelamin perempuan adalah $\frac{30}{50} \times 100\%$ atau 60%. Seperti halnya angka decimal, pada persen juga dapat berlaku operasi hitung seperti pada bilangan yang lain. Mengapa? Karena angka persen dapat kita rubah menjadi bentuk pecahan. Masalah-masalah dalam kehidupan nyata yang berkaitan dengan persen biasanya mempunyai bentuk-bentuk sebagai berikut:

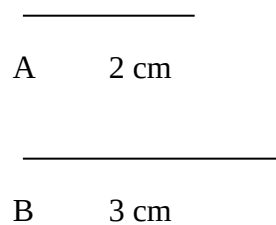
- (1) menentukan persen dari suatu bilangan,
- (2) menentukan persen suatu bilangan dibanding suatu bilangan lain, dan
- (3) menentukan suatu bilangan jika persen dari suatu bilangan diketahui.

2) Perbandingan

Perbandingan sering muncul dalam kehidupan sehari-hari. Memulai pembelajaran dengan materi perbandingan dapat kita awali dengan pemberian permasalahan kontekstual di sekitar siswa, Misalnya, batu yang dilempar Hendi lebih berat dibandingkan penghapus yang dilempar Firman. Atau Santi membawa buku lebih banyak dibandingkan edo.

Memberikan pemahaman untuk konsep perbandingan, dapat dibantu berbagai media atau benda-benda yang ada disekitar siswa, misalkan saja pensil, buku, kelereng, koun, dan sebagainya. Misalkan guru akan mengajak siswa membandingkan panjang dua buah tali.

Untuk menjelaskan perbandingan kepada siswa SD, kita dapat menggunakan media pembelajaran atau alat peraga seperti benang atau manik-manik. Sebagai ilustrasi, perhatikan dua buah gambar benang berikut ini:

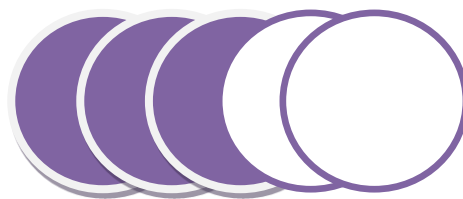


Gambar 1.30. Ilustrasi perbandingan panjang benang.

Panjang kedua benang pada gambar di atas dapat dinyatakan dalam perbandingan sebagai berikut:

- Benang B 1 cm lebih panjang dari benang A.
- Benang A 1 cm lebih pendek dari benang B
- Panjang benang B berbanding panjang benang A adalah 3 berbanding 2.
- Panjang benang A berbanding panjang benang B adalah 2 berbanding 3.

Selanjutnya, perhatikan Gambar 1.27 berikut ini!



Gambar 1.31. Ilustrasi perbandingan menggunakan manik-manik

Manik-manik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan sebagai berikut:

1. Perbandingan banyak manik-manik ungu dengan putih adalah 3 berbanding 2.
2. Perbandingan banyaknya manik-manik putih dengan ungu adalah 2 berbanding 3.
3. Perbandingan banyaknya manik-manik ungu dengan semua manik-manik adalah 3 berbanding 5.
4. Perbandingan banyaknya manik-manik putih dengan semua manik-manik adalah 2 berbanding 5.

Selain persoalan di atas, contoh permasalahan pada konsep perbandingan lainnya adalah sebagai berikut:

Pada suatu kelas, banyak peserta didik laki-laki adalah 25, dan banyak peserta didik perempuan adalah 20. Perbandingan banyak peserta didik laki-laki dan perempuan adalah $25 : 20 = 5 : 4$. Perbandingan banyak peserta didik laki-laki dan peserta didik keseluruhan adalah $25 : 45 = 5 : 9$. Perbandingan banyak peserta didik perempuan dan peserta didik keseluruhan adalah $20 : 45 = 4 : 9$.

Dari contoh-contoh tersebut, kita dapat membandingkan dua variable, yang dapat kita tulis perbandingan variabel A dan b atau disimbolkan dengan $A : B$. $A : B$ dapat juga dinyatakan sebagai perbandingan banyak anggota variabel A dengan banyak anggota variabel B, bukan melambangkan banyak variabel A dibagi banyak variabel B. Sehingga dapat disimpulkan tanda “:” tidak dimaknai sebagai operasi hitung pembagian.

Dua buah perbandingan yang ekuivalen dapat membentuk sebuah proporsi.

c) Perbandingan Senilai

Perhatikan beberapa contoh kasus berikut ini: Misalkan harga 1 kg mangga adalah Rp12.500,00. Maka harga 2 kg mangga adalah Rp25.000,00. Supaya Anda lebih memahami materi ini, perhatikan contoh berikut!

Jika harga 5 kg rambutan adalah Rp75.000,00, berapakah harga 7 kg rambutan?

Salah satu cara yang dapat dilakukan peserta didik adalah mencari harga 1 kg rambutan, yaitu $\text{Rp}75.000 / 5 = \text{Rp}15.000$. Jadi harga 7 kg rambutan adalah $\text{Rp}15.000,00 \times 7 \text{ kg} = \text{Rp}105.000,00$. Jika dihubungkan dengan proporsi maka:

$$\frac{75.000}{5} = \frac{m}{7}$$

$$5m = 75.000 \times 7$$

$$m = \frac{75.000 \times 7}{5}$$

$$m = 105.000$$

Jadi, harga 7 kg rambutan adalah Rp105.000,00.

Contoh yang lain adalah: Pada sebuah peternakan terdapat 40 ayam. Untuk 40 ayam tersebut disediakan sebuah karung makanan ayam yang akan habis dalam waktu 5 hari. Karena adanya wabah virus, ayam yang tersisa hanya 25 ayam. Cukup untuk berapa harikah satu karung pakan ayam?

$\frac{40}{25} = \frac{m}{5}$ (semakin sedikit ayam, waktu untuk menghabiskan makanan ayam semakin lama).

$$25m = 40 \times 5$$

$$25m = 200$$

$$m = 8 \text{ hari.}$$

Jadi satu karung pakan ayam cukup untuk 8 hari.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut apabila diperhatikan, apabila nilai salah satu aspek bertambah, maka nilai aspek yang lain juga akan bertambah. Kondisi seperti ini yang dinamakan perbandingan senilai. Perbandingan senilai adalah suatu perbandingan yang apabila suatu nilai ditambah maka jumlah pembandingnya juga bertambah.

d) Perbandingan Berbalik Nilai

Perhatikan beberapa contoh berikut ini. Misal, untuk merenovasi sebuah rumah, diperlukan 12 orang pekerja dalam waktu 3 hari. Berapa lamakah rumah tersebut dapat selesai direnovasi jika pekerja ada 36 orang?

Untuk menjawab soal tersebut maka kita harus menuliskan terlebih dahulu hal-hal yang diketahui dalam soal sebagai berikut:

$$12 \text{ orang} = 3 \text{ hari.}$$

$$36 \text{ orang} = \dots \text{hari}$$

Waktu yang dibutuhkan untuk merenovasi rumah jika pekerjanya ada 36 orang kita misalkan dengan n . Maka:

$$36 \text{ orang} \times n = 12 \text{ orang} \times 3 \text{ hari}$$

$$36 \times n = 36$$

$$n = 36 : 36$$

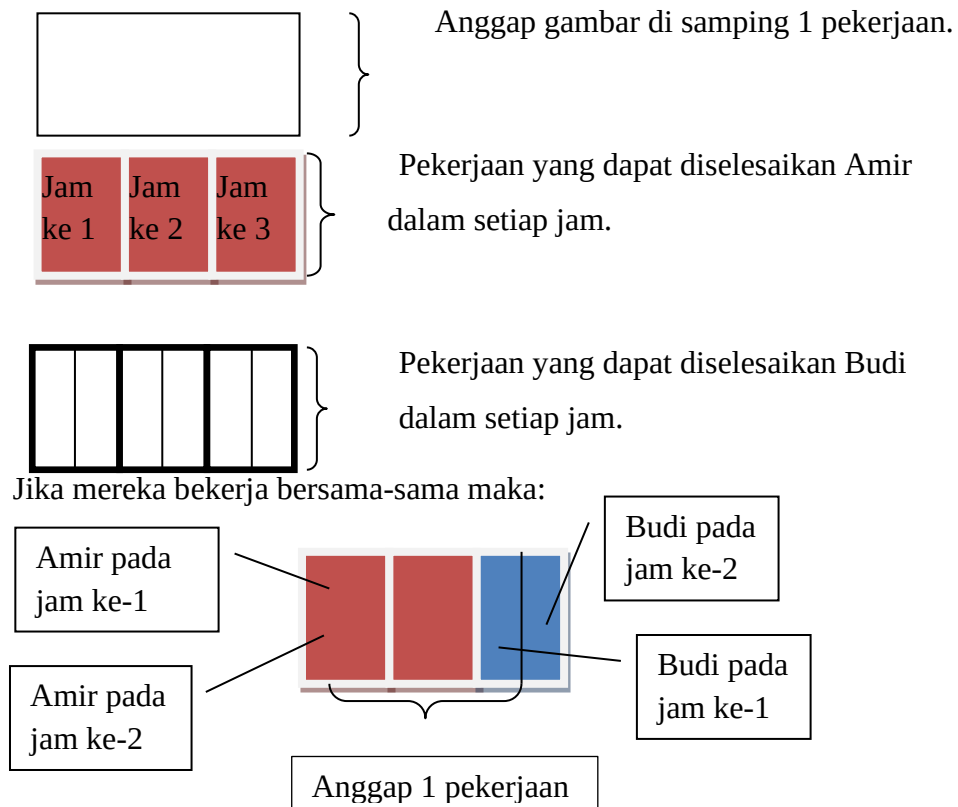
$$n = 1$$

Jadi waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah adalah 1 hari. Artinya, semakin banyak pekerja maka semakin sedikit waktu yang diperlukan untuk merenovasi rumah.

Sekarang perhatikan contoh permasalahan berikut ini!

Amir dapat menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 3 jam, sedangkan Budi dapat menyelesaikan dalam waktu 6 jam. Jika mereka bekerja bersama-sama, berapa waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut?

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka Amir dapat menyelesaikan $\frac{1}{3}$ bagian pekerjaan dalam 1 jam, dan Budi dapat menyelesaikan $\frac{1}{6}$ bagian pekerjaan dalam waktu 1 jam. Permasalahan tersebut dapat diilustrasikan pada gambar berikut ini:



Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa:

Pada jam pertama Amir dan Budi secara bersama-sama menyelesaikan $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ bagian pekerjaan (setiap jam mereka dapat menyelesaikan $\frac{3}{6}$ bagian pekerjaan).

Jadi, sisa pekerjaannya adalah $1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$.

Karena sisa pekerjaan mereka adalah $\frac{3}{6}$ bagian, maka pekerjaan akan selesai dalam waktu 2 jam.

Berdasarkan perhitungan sebelumnya, setiap jam mereka dapat menyelesaikan $\frac{3}{6}$ bagian pekerjaan, maka untuk menyelesaikan semua pekerjaan mereka membutuhkan waktu $\frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{3} = 2$ jam.

Secara matematis dapat ditulis:

$$\frac{1}{t_T} = \frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B}$$

$$\frac{1}{t_T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{t_T} = \frac{3}{6}$$

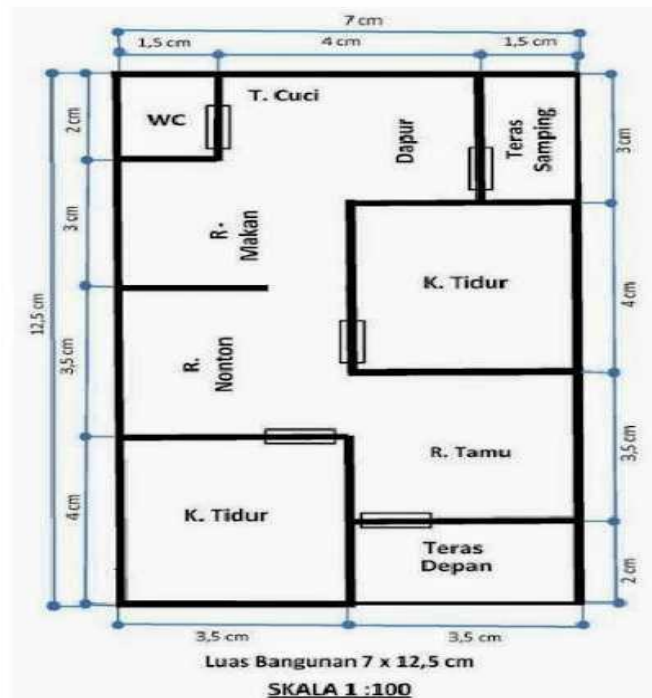
$$t_T = 2 \text{ jam}$$

Jadi, pekerjaan tersebut akan selesai dalam waktu 2 jam.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, apabila nilai dari suatu aspek bertambah, maka nilai dari aspek yang lain akan berkurang. Kondisi seperti ini yang dinamakan dengan perbandingan berbalik nilai. Perbandingan berbalik nilai adalah perbandingan yang apabila nilainya ditambah maka nilai pembandingnya berkurang.

3) Skala

Materi skala sangat berhubungan dengan materi lain terutama tentang peta. Guru dapat menunjukkan pada siswa pada peta akan ada keterangan misalnya 1 : 15.000.000, dimana dapat dimaknai siswa dengan arti dari 1 cm pada gambar peta mewakili 15.000.000 jarak sebenarnya. Skala dituliskan dalam bentuk perbandingan. Skala termasuk perbandingan senilai. Sehingga skala dapat didefinisikan sebagai jarak pada peta yang mewakili jarak sebenarnya.



Gambar 1.32. Denah dan Skala

Misalkan terdapat denah rumah seperti ini. Denah tersebut dibuat dengan skala 1:100. Maka kita akan dapat menyebutkan bahwa setiap 1cm pada gambar mewakili 100cm pada panjang sebenarnya. Sehingga, kita akan mengetahui bahwa ukuran tanah tersebut adalah 700cm dan 1250cm atau 7meter dan 12,5meter. Kita juga dapat menentukan ukuran dari setiap ruangan pada denah tersebut.

Kalimat yang menyatakan, “1 cm pada gambar denah menunjukkan 1.00 cm pada bidang tanah sebenarnya” disebut dengan denah itu mempunyai “skala 1 : 100”.

$$skala = \frac{jarak\ pada\ peta}{jarak\ sebenarnya}$$

$$jarak\ sebenarnya = \frac{jarak\ pada\ peta}{skala}$$

$$jarak\ pada\ peta = skala \times jarak\ sebenarnya$$

e. FPB DAN KPK

1) Faktor Persekutuan Terbesar

Bilangan bulat a ($a \neq 0$) merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$. Bilangan bulat positif a merupakan pembagi bilangan bulat positif b dan c , maka a disebut pembagi persekutuan b dan c .

Definisi:

Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b , FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi:

$$d \mid a \text{ dan } d \mid b.$$

FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan $a = \text{FPB}(a, b)$

Untuk menentukan FPB (a, b) dapat melalui metode irisan himpunan, metode faktorisasi prima, dan metode algoritma pembagian.

1. Metode Irisan Himpunan

Metode irisan himpunan dapat dilakukan dengan mendaftar semua bilangan dari himpunan faktor (pembagi positif) dari dua bilangan, kemudian tentukan himpunan sekutunya.

Contoh: tentukan FPB dari 16 dan 24

Faktor 16 = {1, 2, 4, 8, 16}.

Faktor 24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

Faktor dari 16 dan 24 adalah {1, 2, 4, 8}.

FPB dari 16 dan 24 adalah 8

2. Metode Faktorisasi Prima

Untuk beberapa kasus, metode irisan himpunan memiliki kekurangan dari segi waktu. Metode tersebut akan memerlukan waktu yang lama jika bilangan-bilangannya memiliki banyak faktor. Metode faktorisasi prima

dapat dilakukan dengan cara menentukan faktorisasi prima dari dua atau lebih bilangan, lalu tentukan faktor sekutu prima, FPB dari dua bilangan atau lebih adalah hasil kali faktor-faktor sekutu, dimana yang dipilih adalah bilangan dengan pangkat terendah antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.

Contoh: tentukan FPB dari 300 dan 378

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

$$378 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Faktor sekutu prima dari faktorisasi prima tersebut adalah 2 dan 3. FPB dari 300 dan 378 adalah $2 \times 3 = 6$

3. Metode Algoritma Pembagian

Menurut algoritma pembagian, bilangan positif a dan b , $a \geq b$, dapat ditulis dengan $a = bq + r$, dimana q bilangan bulat positif dan r bilangan cacah.

Contoh: Tentukan FPB dari 378 dan 300

Menurut algoritma pembagian:

$$378 = 1 \times 300 + 78, \text{ dan } 0 \leq 78 \leq 300$$

Hal ini berarti pembagi 378 dan 300 juga membagi 78.

$$\text{Jadi, FPB}(378, 300) = \text{FPB}(300, 78)$$

Gunakan algoritma pembagian lagi:

$$300 = 3 \times 78 + 66, 0 \leq 66 \leq 78, \text{ FPB } \{300, 78\} = \text{FPB } \{78, 66\}$$

$$78 = 1 \times 66 + 12, 0 \leq 12 \leq 66, \text{ FPB } \{78, 66\} = \text{FPB } \{66, 12\}$$

$$66 = 5 \times 12 + 6, 0 \leq 6 \leq 12, \text{ FPB } \{66, 12\} = \text{FPB } \{12, 6\}$$

$$12 = 2 \times 6 + 0. \text{ FPB } \{12, 6\} = 6$$

$$\text{Jadi FPB } \{378 \text{ dan } 300\} = 6$$

Contoh

1. Tini berencana menghias pigura produksi miliknya dengan manik-manik. Setelah dikumpulkan ternyata Tini memiliki 96 manik-manik kuning, 120 manik-manik merah, 108 manik-manik ungu, dan 72 manik-manik biru. Jika setiap pigura memiliki banyak manik-manik dan warna yang sama, maka pigura yang dapat dihias oleh Tini adalah

Solusi dari pernyataan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari 96, 120, 108, 72 atau FPB (96, 120, 108, 72) mengapa FPB? Karena Tini akan membagi manik-maniknya untuk setiap pigura.

FPB dari 96, 120, 108, 72 adalah 12 (mengapa?)

Karena FPB (96, 120, 108, 72) adalah 12, maka setiap pigura akan dihias oleh 8 manik-manik kuning, 10 manik-manik merah, 9 manik-manik ungu dan 6 manik-manik biru.

2. Bu guru memiliki 105 buah pisang, 75 buah kelengkeng, dan 30 buah jeruk. Buah-buahan tersebut akan dibagikan secara merata untuk murid-muridnya. Berapakah jumlah masing-masing buah yang diterima oleh setiap murid?

Solusi dari pertanyaan tersebut adalah kita akan mencari FPB dari bilangan-bilangan tersebut.

FPB dari 105, 75, dan 30 adalah 15

Maka banyak murid yang mendapatkan buah-buahan tersebut ada 15 orang.

Jadi, setiap anak akan mendapatkan 7 buah pisang, 5 buah kelengkeng, dan 2 buah jeruk.

2) Kelipatan Persekutuan Terkecil

Suatu bilangan bulat c disebut kelipatan persekutuan dari bilangan bulat tak nol a dan b jika $a \mid c$ dan $b \mid c$. Himpunan kelipatan persekutuan dari a dan b merupakan sebuah bilangan bulat terkecil, yang ditulis KPK (a, b) .

Definisi:

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan tidak nol a dan b , KPK (a, b) adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi $a \mid m$ dan $b \mid m$.

$$\text{KPK}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{FPB}\{a, b\}}$$

Seperti halnya FPB, untuk menentukan KPK juga dapat dilakukan dengan metode irisan himpunan dan metode faktorisasi prima.

1. Metode Irisan Himpunan

Untuk menentukan KPK melalui metode irisan himpunan, sebelumnya dapat ditentukan terlebih dahulu kelipatan-kelipatan positif dari bilangan-bilangan, kemudian tentukan himpunan persekutuan dari kelipatan bilangan-bilangan itu, dan tentukan yang terkecil.

Contoh:

Tentukan KPK dari 12, 15, dan 20

Kelipatan 12 = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...}

Kelipatan 15 = {15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, ...}

Kelipatan 20 = {20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...}

Kelipatan persekutuan dari 12, 15, 20 = {60, 120, ...}

KPK dari 12, 15, 20 = 60

2. Metode Faktorisasi Prima

Seperti halnya FPB, metode faktorisasi prima juga dapat digunakan untuk menentukan KPK. Perbedaannya adalah saat menentukan KPK pilih bilangan dengan pangkat tertinggi antara hasil faktorisasi prima dari bilangan-bilangan tersebut.

4. Tugas Terstruktur

Setelah Anda membaca dan memahami uraian materi dan contoh di atas, coba Anda kerjakan tugas terstruktur berikut ini:

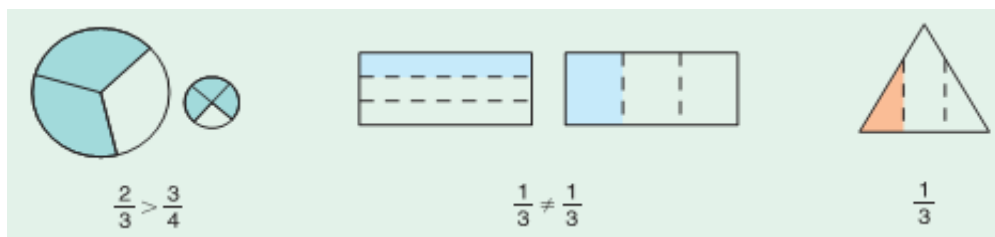
Menurut teori Bruner pembelajaran matematika melalui tiga fase yaitu fase enactive, iconic, dan symbolic. Berdasarkan pengalaman Anda mengajarkan matematika, bagaimanakah rancangan dan penerapan pembelajaran matematika pada materi bilangan menurut teori Bruner?

Catatan: Anda dapat memilih salah satu materi saja.

5. Forum Diskusi

Untuk menambah penguasaan materi Anda, silakan selesaikan forum diskusi mengenai materi bilangan berikut ini:

1. Sebagai seorang guru pastilah kita pernah mengajarkan pengurangan bilangan cacah. Pernahkah Anda mengajarkan konsep pengurangan bilangan cacah tanpa menggunakan istilah meminjam? Jika pernah, coba ceritakan pengalaman Anda dan bagaimana caranya? Jika belum pernah, coba rancang cara mengajarkan pengurangan bilangan cacah tanpa menggunakan istilah meminjam!
2. Perhatikan contoh kasus berikut ini:



Coba Saudara diskusikan mengapa hal tersebut dapat terjadi dan apa yang dapat dilakukan oleh Saudara sebagai seorang guru?

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Bilangan

- 1) Bilangan adalah suatu unsur atau objek yang tidak didefinisikan (*underfined term*).
- 2) Lambang bilangan adalah simbol atau lambang yang digunakan dalam mewakili suatu bilangan.
- 3) Sistem numerasi adalah sekumpulan lambang dan aturan pokok untuk menuliskan bilangan.
- 4) Bilangan kardinal menyatakan hasil membilang (berkaitan dengan pertanyaan berapa banyak dan menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan).
- 5) Bilangan ordinal menyatakan urutan atau posisi suatu objek.
- 6) Bilangan komposit adalah bilangan asli yang memiliki lebih dari 2 faktor.
- 7) Bilangan asli dapat digolongkan menurut faktornya yaitu: bilangan genap, bilangan ganjil, dan bilangan prima.
- 8) Bilangan cacah dapat didefinisikan sebagai bilangan yang digunakan untuk menyatakan kardinalitas suatu himpunan.
- 9) Bilangan sempurna adalah bilangan asli yang jumlah faktornya (kecuali faktor yang sama dengan dirinya) sama dengan bilangan tersebut.
- 10) Himpunan yang merupakan gabungan dari himpunan bilangan asli dengan lawannya dan juga bilangan nol disebut himpunan bilangan bulat.
- 11) Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$.
- 12) Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan bilangan-bilangan bulat a dan b , dengan $b \neq 0$.
- 13) Bilangan real adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dengan bilangan irasional.

- 14) Bilangan kompleks adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $z = a + bi$, dengan $a, b \in R$, dan i : *imajiner* (bilangan khayal).

b. Bilangan Bulat dan Operasi Hitung Pada Bilangan Bulat

- 1) Himpunan bilangan bulat terdiri dari gabungan bilangan asli, bilangan nol, dan lawan dari bilangan asli. Bilangan asli tersebut dapat disebut juga bilangan bulat positif. Lawan dari bilangan asli tersebut dapat disebut bilangan bulat negatif.
- 2) Jika a dan b adalah bilangan bulat positif, maka jumlah dari kedua bilangan akan dilambangkan $a + b$, yang diperoleh dengan menentukan cacah atau banyaknya gabungan himpunan dari a dan b .
- 3) Untuk membantu peserta didik memahami konsep operasi hitung penjumlahan ataupun pengurangan dapat dibantu dengan menggunakan media koin 2 sisi, gerakan maju mundur dan garis bilangan.
- 4) Operasi hitung penjumlahan bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, memiliki unsur identitas, dan memiliki invers terhadap penjumlahan.
- 5) Operasi hitung pengurangan pada dasarnya merupakan kebalikan dari operasi penjumlahan. Jika sebuah bilangan bulat positif a dikurangi dengan bilangan bulat positif b menghasilkan bilangan bulat positif c atau $(a - b = c)$, maka operasi penjumlahan yang terkait adalah $b + c = a$, dengan syarat $a > b$.
- 6) Perkalian pada dua buah bilangan bulat positif adalah penjumlahan yang berulang.
- 7) Operasi hitung perkalian antara lain bersifat tertutup, komutatif, asosiatif, distributif dan memiliki unsur identitas.
- 8) Untuk setiap a dan b anggota bilangan bulat, dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ sedemikian sehingga $a = bc$.

c. Bilangan Pecahan dan Operasi Hitung Pada Bilangan Pecahan

- 1) Bilangan pecahan dilambangkan dengan $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ dengan catatan a dan b anggota bilangan bulat.
- 2) Menjelaskan konsep bilangan pecahan dapat diilustrasikan dengan konsep panjang, luas, ataupun himpunan.
- 3) Bilangan-bilangan pecahan senilai adalah bilangan-bilangan pecahan yang cara penulisannya berbeda tetapi mempunyai hasil bagi yang sama, atau bilangan-bilangan itu mewakili daerah yang sama, atau mewakili bagian yang sama.
- 4) Bilangan pecahan murni disebut juga bilangan pecahan sejati adalah bilangan pecahan yang paling sederhana (tidak dapat disederhanakan lagi).
- 5) Bilangan pecahan senama adalah bilangan-bilangan pecahan yang mempunyai penyebut sama.

d. Persen, Perbandingan dan Skala

- 1) Persen atau perseratus dilambangkan dengan %.
- 2) Perbandingan a dengan b dapat kita lambangkan dengan $a : b$.
- 3) Dua buah perbandingan yang ekuivalen dapat membentuk sebuah proporsi.

e. FPB dan KPK

- 1) Bilangan bulat a ($a \neq 0$) merupakan faktor dari suatu bilangan bulat b sedemikian sehingga $b = ac$.
- 2) Misalkan a dan b bilangan bulat, faktor persekutuan terbesar dari a dan b , FPB (a, b) adalah sebuah bilangan bulat positif yang memenuhi: $d \mid a$ dan $d \mid b$.
- 3) FPB dari dua bilangan positif adalah bilangan bulat terbesar yang membagi keduanya. Dinyatakan dengan $a = \text{FPB}(a, b)$

- 4) Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan tak nol a dan b ,
 KPK $\{a, b\}$ adalah bilangan bulat positif m yang memenuhi $a \mid m$ dan
 $b \mid m$. $\text{KPK}\{a, b\} = \frac{a \times b}{\text{FPB}\{a, b\}}$

2. Tes Formatif

- Diantara pernyataan berikut yang bernilai benar adalah
 - Setiap bilangan rasional adalah bilangan bulat.
 - Diantara bilangan 0 dan 1 pada himpunan bilangan real tidak terdapat bilangan lain.
 - Anggota himpunan bilangan real merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan bilangan irasional.
 - Setiap anggota bilangan cacah adalah anggota bilangan asli.
 - Himpunan bilangan bulat negative bukan anggota himpunan real.
- Bu Irma dan Bu Siti menjual barang kebutuhan pokok. Hasil penjualan Bu Irma $\frac{4}{7}$ hasil penjualan Bu Siti. Jika hasil total penjualan mereka adalah Rp. 506.000, berapakah hasil penjualan Bu Siti?
 - Rp. 322.000
 - Rp. 276.000
 - Rp. 184.000
 - Rp. 148.000
 - Rp. 46.000
- Seorang siswa menuliskan KPK dari 24 dan 30 adalah $2^3 \times 3 \times 5$, dan FPB dari 24 dan 30 adalah 2. Pernyataan berikut iniyang berorientasi HOTS dan relevan pada materi tersebut adalah
 - Hitunglah KPK dan FPB dari 24, 42, dan 48!
 - Tentukan faktorisasi prima dari 458
 - Hitunglah banyak factor dari 342
 - Manakah diantara 72 dan 80 yang memiliki factor prima lebih sedikit?
 - Tentukan factor prima dari 742
- Adi menghitung pengurangan dua bilangan pecahan sebagai berikut:

$$\frac{3}{11} - \frac{1}{5} = \frac{3 - 1}{11 - 5} = \frac{1}{3}$$

Berdasarkan jawaban tersebut, Adi belum menguasai konsep tentang

- a. penjumlahan
 - b. pecahan
 - c. pecahan senilai
 - d. pengurangan bilangan bulat
 - e. pengurangan bilangan pecahan
5. Pecahan berikut yang terletak diantara $\frac{5}{6}$; dan $\frac{6}{7}$; adalah ...
- a. $\frac{71}{84}$
 - b. $\frac{70}{84}$
 - c. $\frac{37}{42}$
 - d. $\frac{36}{42}$
 - e. $\frac{35}{42}$
6. Cindy mengerjakan suatu pekerjaan dalam waktu 2 hari, Firman untuk pekerjaan yang sama dapat diselesaikan dalam waktu 3 hari, sedangkan Teguh dapat menyelesaikan dalam waktu 4 hari. Jika mereka akan bekerja bersama-sama untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut, maka pekerjaan itu akan selesai dalam waktu
- a. 23 jam
 - b. 22 jam 9 menit
 - c. 22 jam 15 menit
 - d. 1 hari 50 menit
 - e. 1 hari
7. Pembangunan sebuah gedung direncanakan selesai dibangun selama 20 hari oleh 36 pekerja. Setelah dikerjakan 12 hari pekerjaan dihentikan selama 2 hari. Jika kemampuan bekerja setiap pekerja dianggap sama dan agar pembangunan selesai tepat waktu, banyak pekerja tambahan yang diperlukan adalah....
- a. 12 pekerja
 - b. 14 pekerja

- c. 16 pekerja
 - d. 18 pekerja
 - e. 20 pekerja
8. Firman dan Saiful menampung air di sebuah bak mandi hingga penuh pada waktu yang berlainan. Firman mengisi bak mandi dengan 4 ember besar dan 9 ember kecil. Saiful mengisi bak mandi dengan 6 ember besar dan ember kecil. Perbandingan volume ember besar dan ember kecil adalah ...
- a. 2 : 3
 - b. 3 : 2
 - c. 4 : 3
 - d. 3 : 4
 - e. 2 : 1
9. A adalah sebuah pecahan. Apabila pembilang A ditambah 2 maka akan diperoleh pecahan baru yaitu $\frac{2}{3}$. Apabila penyebut dikurangi 1 maka akan diperoleh pecahan baru yaitu $\frac{1}{2}$. Nilai A adalah
- a. $\frac{6}{12}$
 - b. $\frac{4}{9}$
 - c. $\frac{3}{7}$
 - d. $\frac{4}{7}$
 - e. $\frac{8}{15}$
10. Seorang siswa diminta mengarsir $\frac{1}{2}$ bagian kertas pertama dan $\frac{1}{3}$ bagian kertas kedua. Kemudian siswa tersebut merasa bahwa apa yang diarsirnya salah, karena kertas pertama memiliki arsiran yang lebih luas dibandingkan kertas kedua. Penjelasan yang tepat diberikan guru untuk membantu siswa agar siswa memahami konsep membandingkan pecahan adalah
- a. Guru menjelaskan bahwa pada pecahan apabila penyebutnya lebih kecil maka nilainya lebih besar.

- b. Guru meminta siswa untuk membandingkan kedua pecahan tersebut dengan gambar yang lain.
- c. Guru menjelaskan bahwa apabila pembilangnya sama dan penyebut berbeda maka pecahan yang penyebutnya lebih besar memiliki nilai yang lebih kecil.
- d. Guru memberikan contoh kepada siswa melalui potongan kue untuk membuktikan bahwa itu benar.
- e. Guru meminta siswa untuk menyamakan penyebut kedua pecahan tersebut, setelah penyebutnya sama, kemudian bandingkan nilai pecahan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Bennet, A., Burton, L., Nelson, L. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Mc Graw Hill.
- Fitriani, A.D., (2009). *Bilangan (Modul PPG)*. tidak diterbitkan.
- Musser, G., Burger, W., Peterson, B. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*. New York: John Willey & Sons
- Prabawanto, S., Rahayu, P. (2006). *Bilangan*. Bandung: UPI Press.
- Prabawanto, S, Tiurlina, Nuraeni, E. (2008). *Pendidikan Matematika II*. Bandung: UPI Press.
- Russeffendi. (2006). *Pengantar kepada Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Sobel, Max., Maletsky, Evan . (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, And Strategies*. London: Pearson-Viacom Company.
- Walle, John. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Virginia: Pearson Prentice Hall.



DAR2/Profesional/027/2/2022

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

MODUL 2

KEGIATAN BELAJAR 2

GEOMETRI DAN PENGUKURAN

Nama Penulis:

Andhin Dyas Fitriani, M.Pd

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISTEK DAN
TEKNOLOGI**

2022

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Kegiatan belajar matematika disusun dengan tujuan untuk memberikan pengetahuan dan wawasan Saudara terkait materi geometri. Kegiatan belajar ini menyajikan bahasan mengenai konsep geometri. Secara rinci kegiatan belajar terdiri dari 8 topik, yaitu menyajikan tentang:

- a. Dasar-dasar geometri dan pengukuran.
- b. Segi banyak (kurva, segitiga, segiempat dan lingkaran).
- c. Kesebangunan dan kekongruenan.
- d. Keliling dan luas bangun datar (pengukuran panjang, keliling bangun datar, pengukuran luas, dan luas bangun datar).
- e. Bangun ruang (prisma, limas, dan bola).
- f. Luas permukaan dan volume (luas permukaan bangun ruang, pengukuran volume, dan volume bangun ruang).
- g. Debit (pengukuran waktu dan debit).
- h. Jarak, waktu, dan kecepatan.

Kegiatan belajar ini disusun secara cermat sesuai dengan tujuan yang harus dicapai dalam implementasi kurikulum 2013 mata pelajaran Matematika di Sekolah Dasar. Materi yang disajikan relevan dengan kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang guru profesional ketika mengabdikan dirinya dalam dunia pendidikan dalam rangka mencerdaskan generasi bangsa Indonesia.

Berdasarkan Undang-undang Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen, pada Pasal 10 ayat (1) menyatakan bahwa "Kompetensi guru sebagaimana dimaksud dalam Pasal 8 meliputi kompetensi pedagogik, kompetensi kepribadian, kompetensi sosial, dan kompetensi profesional". Jadi, tidak hanya menguasai materi, Anda juga akan mampu mengembangkan materi geometri dan pengukuran dalam kegiatan pembelajaran di Sekolah Dasar dengan menerapkan pembelajaran abad 21 yang memberikan kecakapan dalam bidang 4C (*Communication, Collaboration, Critical thinking and problem solving*, dan *Creative and Innovative*), mengembangkan literasi khususnya

literasi matematis, realistik, kontekstual, aktif, kreatif, menyenangkan, dan mengembangkan karakter siswa serta mampu mengembangkan media pembelajaran yang tepat bagi peserta didik Sekolah Dasar.

2. Relevansi

Kegiatan belajar ini juga relevan dengan kompetensi pedagogik. Melalui pembelajaran dengan modul ini Anda akan belajar memahami peserta didik dengan karakter yang beragam dari segi kemampuan berpikir matematis dan merancang perencanaan pelaksanaan pembelajaran serta evaluasi pembelajaran matematika yang sesuai. Kegiatan belajar ini selain berisi materi utama, juga dilengkapi dengan materi penunjang yang dapat dipelajari untuk lebih memperkuat konsep dan pemahaman mengenai pembelajarannya di Sekolah Dasar (SD) yang berupa video, ppt, dan contoh pengembangan lembar kerja peserta didik (LKPD) pada materi Geometri dan Pengukuran di SD. Selain itu juga dilengkapi dengan *link* rujukan yang dapat dipelajari mengenai konsep Geometri dan Pengukuran.

Setelah mempelajari modul pada materi utama serta materi penunjang, peserta diharapkan mampu:

- a. Merancang pembelajaran matematika Sekolah Dasar dengan menerapkan pendekatan berbasis konstruktivisme.
- b. Menganalisis karakteristik suatu kasus pembelajaran matematika Sekolah Dasar.
- c. Menyusun soal yang mengukur kemampuan matematika tingkat tinggi pada materi geometri dan pengukuran.
- d. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan pada segitiga dan segiempat.
- e. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan bangun ruang.
- f. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran (pengukuran berat, pengukuran panjang, pengukuran waktu, dan konversi satuan).
- g. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan debit.
- h. Memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan jarak, waktu, dan kecepatan.

3. Petunjuk Belajar

Untuk membantu Anda dalam memahami modul ini alangkah lebih baik diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut ini:

- a. Bacalah dengan cermat uraian-uraian penting yang terdapat dalam modul ini sampai Anda memahami secara tuntas tentang apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.
- b. Temukanlah kata-kata kunci dari kegiatan belajar ini. Alangkah lebih baik apabila Anda mencatat dan meringkas hal-hal penting tersebut.
- c. Pelajari modul ini melalui pengalaman sendiri serta diskusikanlah dengan rekan atau instruktur Anda.
- d. Bacalah dan pelajarilah sumber-sumber lain yang relevan. Anda dapat menemukan bacaan dari berbagai sumber, termasuk dari internet.
- e. Mantapkanlah pemahaman Anda melalui pengerjaan forum diskusi dan tes formatif yang tersedia dalam modul ini dengan baik. Kemudian, nilai sendiri tingkat pencapaian Anda dengan membandingkan jawaban yang telah Anda buat dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada akhir modul.
- f. Diskusikanlah apa yang telah dipelajari, termasuk hal-hal yang dianggap masih sulit, dengan teman-teman Anda.

B. INTI

1. Capaian Pembelajaran

- a. Menguasai teori aplikasi pedagogis (*pedagogical content knowledge*) minimal teori belajar, evaluasi proses belajar dan hasil belajar, kurikulum, dan prinsip-prinsip pembelajaran matematika SD yang mendidik.
- b. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika sekolah secara mendalam.
- c. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi geometri dan pengukuran.
- d. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah materi geometri dan pengukuran serta kehidupan sehari-hari.

2. Sub Capaian Pembelajaran

- a. Merancang pembelajaran matematika Sekolah Dasar dengan menerapkan pendekatan berbasis konstruktivisme.
- b. Menganalisis karakteristik suatu kasus pembelajaran matematika Sekolah Dasar.
- c. Menyusun soal yang mengukur kemampuan matematika tingkat tinggi pada materi geometri dan pengukuran.
- d. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan pada segitiga atau segiempat.
- e. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengukuran.
- f. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan debit.
- g. Memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan jarak, waktu, dan kecepatan.

3. Uraian Materi

a. Dasar–dasar Geometri dan Pengukuran

Struktur geometri modern menyepakati istilah dalam geometri, yaitu: 1) unsur yang tidak didefinisikan, 2) unsur yang didefinisikan, 3) aksioma/postulat, 4) teorema/dalil/rumus. Unsur tidak didefinisikan merupakan konsep mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, contoh titik, garis dan bidang. Unsur yang didefinisikan merupakan konsep pengembangan dari unsur tidak didefinisikan dan merupakan konsep memiliki batasan, contoh sinar garis, ruas garis, segitiga. Aksioma/postulat merupakan konsep yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan kebenarannya, contoh postulat garis sejajar. Teorema/dalil/rumus adalah konsep yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif, contoh Teorema Pythagoras.

1) Titik

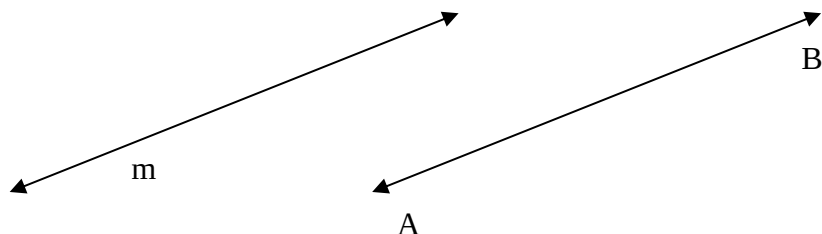
Titik merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Titik merupakan konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran dan berat. Titik disimbolkan dengan noktah. Penamaan titik menggunakan huruf kapital, contoh titik A, titik P, dan sebagainya.



Gambar 2.1 Titik

2) Garis

Garis juga merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Garis merupakan gagasan abstrak yang lurus, memanjang kedua arah, tidak terbatas. Ada 2 cara melakukan penamaan untuk garis, yaitu: (1) garis yang dinyatakan dengan satu huruf kecil, contoh garis m, garis l, dan sebagainya; (2) garis yang dinyatakan dengan perwakilan dua buah titik ditulis dengan huruf kapital, misal garis AB, garis CD, dan sebagainya.



Gambar 2.2 Garis

Garis juga sering disebut sebagai unsur geometri satu dimensi. Hal tersebut dikarenakan garis merupakan sebuah konsep yang hanya memiliki unsur panjang saja.

Sinar garis merupakan bagian dari garis yang memanjang ke satu arah dengan panjang tidak terhingga.



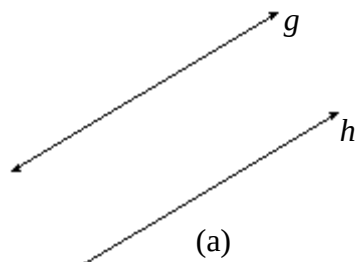
Gambar 2.3 Sinar Garis

Ruas garis merupakan bagian dari garis yang dibatasi oleh dua buah titik pada ujung dan pangkalnya. Ruas garis dapat diukur panjangnya.

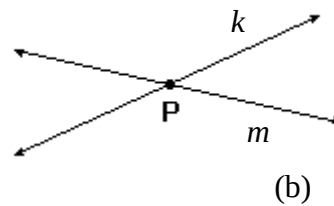


Gambar 2. 4 Ruas Garis

Dua garis g dan h dikatakan sejajar ($g \parallel h$) jika kedua garis tersebut tidak mempunyai titik sekutu (titik potong).



Gambar 2.5 Garis Sejajar

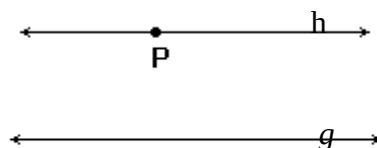


Garis 2.6 Garis Berpotongan

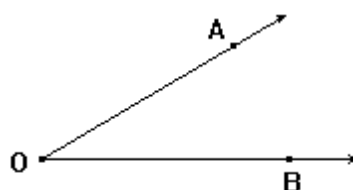
Dua garis m dan k dikatakan berpotongan jika kedua garis tersebut memiliki satu titik potong.

Berikut merupakan salah satu contoh aksioma pada garis. Aksioma yang akan dicontohkan adalah aksioma tentang garis sejajar atau sering disebut aksioma kesejajaran:

Melalui sebuah titik P di luar sebuah garis g , ada tepat satu garis h yang sejajar dengan g .



3) Sudut



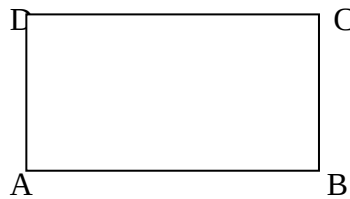
Gambar 2.7 Daerah Sudut

Sudut merupakan daerah yang dibentuk oleh dua sinar garis yang tidak kolinear (tidak terletak pada satu garis lurus) dan konkuren (garis yang bertemu pada satu titik potong) yang berhimpit di titik pangkalnya. Gambar di atas

menggambarkan besar sudut AOB, atau $\angle AOB$. Berdasarkan gambar tersebut maka terdapat titik sudut AOB atau dapat disingkat titik sudut O. Untuk mengukur besar sudut umumnya menggunakan satuan baku yaitu derajat atau radian. Satuan baku untuk mengukur besar sudut pada siswa Sekolah Dasar adalah satuan baku derajat, yang dapat diukur dengan menggunakan bantuan busur derajat.

4) Bidang

Bidang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga bidang termasuk unsur yang tidak didefinisikan. Bidang dapat diartikan sebagai permukaan yang rata, meluas ke segala arah dengan tidak terbatas, serta tidak memiliki ketebalan. Bidang termasuk ke dalam kategori bangun dua dimensi, karena memiliki panjang dan lebar atau alas dan tinggi.



Gambar 2.8 Bidang

5) Ruang

Ruang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga ruang termasuk unsur yang tidak didefinisikan. Ruang diartikan sebagai unsur geometri dalam konteks tiga dimensi, karena memiliki unsur panjang, lebar dan tinggi. Salah satu bentuk model dari ruang adalah model bangun ruang.



Gambar 2.9Ruang

b. Macam-macam Sudut

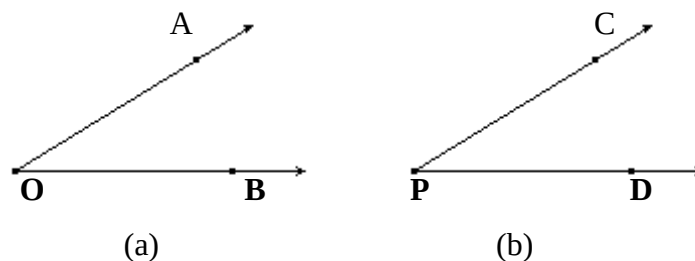
Pada pembelajaran di Sekolah Dasar, untuk memudahkan atau membantu siswa memahami apa itu sudut, kita dapat mengaitkannya dengan jam. Siswa diminta untuk mengamati daerah yang dibentuk misalnya oleh jarum menit dan jarum jam, besar daerah itulah yang dimaksud dengan besar sudut.

Berikut beberapa contoh jenis sudut:

Dua Sudut Kongruen

$\angle AOB$ kongruen dengan $\angle CPD$ (biasanya ditulis sebagai: $\angle AOB \cong \angle CPD$).

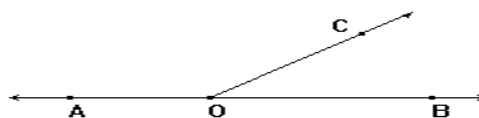
Dua buah sudut dikatakan kongruen jika besar ukuran dua sudut sama.



Gambar 2. 10 Dua Sudut Kongruen

Sudut Suplemen (Berpelurus)

$\angle AOC$ suplemen $\angle COB$, atau $\angle COB$ suplemen $\angle AOC$. Jumlah besar sudut berpelurus adalah 180° .

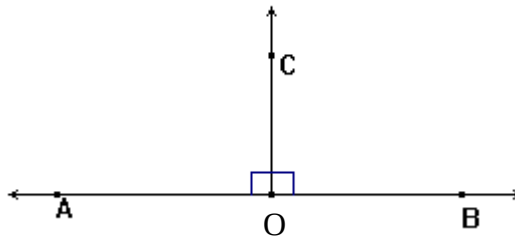


Gambar 2.11 Sudut Suplemen (Berpelurus)

Sudut Siku-siku

Sudut siku-siku adalah sudut yang kongruen dengan suplemennya dan mempunyai besar sudut 90° .

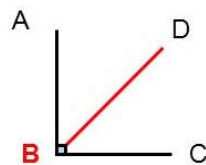
$\angle AOC \cong \angle COB$ dan $\angle AOC$ suplemen $\angle COB$, maka $\angle AOC$ dan $\angle COB$ sudut siku-siku.



Gambar 2.12 Sudut Siku-Siku

Sudut Komplemen

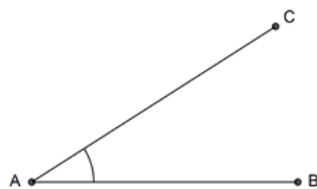
Sudut komplemen adalah sudut yang besarnya 90^0 atau disebut juga dengan sudut berpenyiku.



Gambar 2. 13 Sudut Komplemen

Sudut Lancip

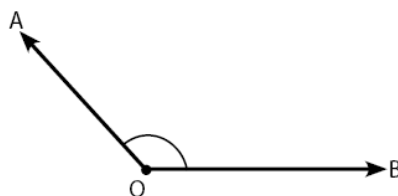
Sudut lancip adalah sudut yang ukurannya kurang dari 90^0 .



Gambar 2.14 Sudut Lancip

Sudut Tumpul

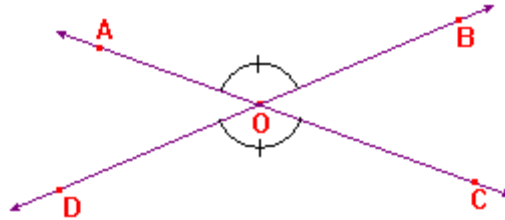
Sudut tumpul adalah sudut yang ukurannya antara 90^0 sampai 180^0 .



Gambar 2.15 Sudut Tumpul

Sudut Bertolak Belakang

Andaikan terdapat dua buah garis yang saling berpotongan,

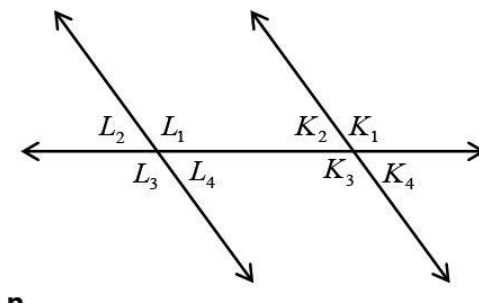


Gambar 2.16 Sudut Bertolak Belakang

Maka $\angle AOB = \angle COD$ dan $\angle AOD = \angle BOC$.

$\angle AOB$ dan $\angle COD$ disebut sudut yang saling bertolak belakang atau sudut bertolak belakang, begitu pula dengan $\angle AOD$ dan $\angle BOC$, keduanya disebut sudut bertolak belakang.

Perhatikan gambar 2.17 berikut ini:



Gambar 2.17 Sudut-Sudut yang Dibentuk oleh Garis yang Memotong Dua Garis Sejajar

Pada gambar tersebut, dua buah garis sejajar dipotong oleh sebuah garis, sehingga akan terbentuk 8 daerah sudut, atau beberapa pasangan-pasangan sudut.

Berikut adalah sudut-sudut yang berkaitan dengan gambar di atas:

Sudut Sehadap

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L_1$ dan $\angle K_1$ disebut sudut sehadap. Besar sudut sehadap adalah sama atau $\angle L_1 = \angle K_1$.

Dapatkah Anda menemukan pasangan sudut sehadap yang lain?

Sudut Dalam Berseberangan

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L_1$ dan $\angle K_3$ disebut sudut dalam berseberangan. Besar sudut dalam berseberangan adalah sama atau $\angle L_1 = \angle K_3$.

Berikut adalah cara untuk menunjukkan besar sudut dalam berseberangan adalah sama:

$\angle L_1 = \angle L_3$ karena sudut bertolak belakang

$\angle L_3 = \angle K_3$ karena sudut sehadap, maka:

$\angle L_1 = \angle K_3$.

Coba Anda temukan pasangan sudut dalam berseberangan yang lain!

Sudut Luar Berseberangan

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L_2$ dan $\angle K_4$ disebut sudut luar berseberangan. Besar sudut luar berseberangan adalah sama atau $\angle L_2 = \angle K_4$.

Berikut adalah cara untuk menunjukkan besar sudut luar berseberangan adalah sama:

$\angle L_2 = \angle L_4$ karena sudut bertolak belakang

$\angle L_4 = \angle K_4$ karena sudut sehadap, maka:

$\angle L_2 = \angle K_4$.

Coba Anda temukan pasangan sudut luar berseberangan yang lain!

Sudut Dalam Sepihak

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L_1$ dan $\angle K_2$ disebut sudut dalam sepihak. Jumlah besar sudut dalam sepihak adalah 180° atau $\angle L_1 + \angle K_2 = 180^\circ$.

Berikut adalah cara untuk menunjukkan jumlah besar sudut dalam sepihak adalah 180° :

$\angle L_1 = \angle K_1$ karena sudut sehadap

$\angle K_1 + \angle K_2 = 180^\circ$ karena sudut berpelurus, maka:

$\angle L_1 + \angle K_2 = 180^\circ$

Coba Anda temukan pasangan sudut dalam sepihak yang lain!

Sudut Luar Sepihak

Perhatikan contoh pasangan sudut berikut ini: $\angle L_2$ dan $\angle K_1$ disebut sudut luar sepihak. Jumlah besar sudut luar sepihak adalah 180° atau $\angle L_2 + \angle K_1 = 180^\circ$.

Berikut adalah cara untuk menunjukkan jumlah besar sudut luar sepihak adalah 180° :

$\angle L_2 = \angle K_2$ karena sudut sehadap

$\angle K_2 + \angle K_1 = 180^\circ$ karena sudut berpelurus, maka:

$$\angle L_2 + \angle K_2 = 180^\circ$$

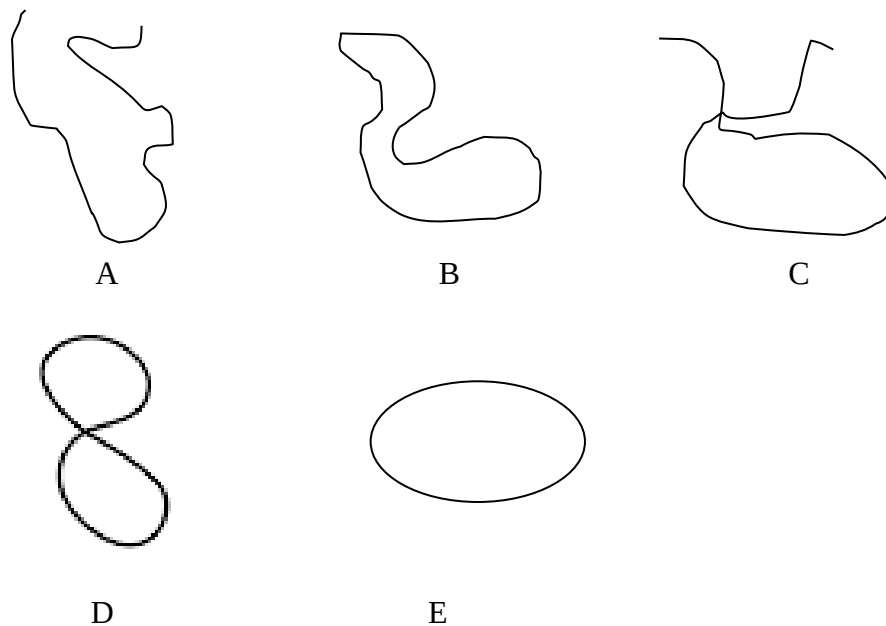
Coba Anda temukan pasangan sudut luar sepihak yang lain!

c. Segi Banyak (Poligon)

Sebelum membahas tentang segi banyak, maka kita akan mempelajari terlebih dahulu tentang kurva.

1) Kurva

Kurva adalah bangun geometri yang merupakan kumpulan semua titik yang digambar tanpa mengangkat pensil dari kertas. Kurva disebut juga dengan lengkungan merupakan bentuk geometri satu dimensi yang dapat terletak pada bidang atau ruang. Berikut ini adalah beberapa contoh gambar kurva:



Gambar 2.18 Kurva

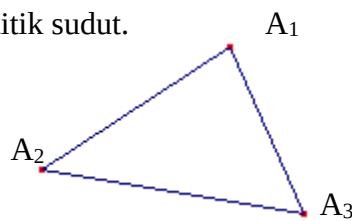
Terdapat dua jenis kurva, yaitu kurva terbuka dan kurva tertutup. Kurva terbuka dibagi menjadi dua bagian yaitu kurva terbuka sederhana dan kurva terbuka tidak sederhana. Kurva terbuka sederhana merupakan sebuah lengkungan yang titik awalnya tidak berimpit dengan titik akhirnya dan tidak terdapat titik potong pada lengkungan tersebut (kurva A). Kurva terbuka tidak sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya dan titik akhirnya tidak berimpit dan terdapat

titik potong pada lengkungan tersebut (kurva C). Kurva tertutup dibagi menjadi kurva tertutup sederhana dan kurva tertutup tidak sederhana. Kurva tertutup tidak sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya saling berimpit dengan titik akhirnya dan terdapat titik potong pada lengkungan tersebut (Kurva D). Kurva tertutup sederhana adalah lengkungan yang titik awalnya berimpit dengan titik akhirnya dan tidak ada titik potong pada lengkungan tersebut. Salah satu contoh kurva tertutup sederhana yang dibentuk dari beberapa segmen garis adalah polygon (segi banyak) (Contoh: lihat gambar E). Contoh segi banyak yang sederhana dan terdapat pada pembelajaran matematika di Sekolah Dasar (yang akan dibahas pada bagian selanjutnya adalah segitiga, segiempat, dan lingkaran).

Sebelum membahas mengenai macam-macam segi banyak pada bagian selanjutnya, maka akan dikemukakan terlebih dahulu tentang sisi dan titik sudut pada segitiga dan segiempat. Sisi merupakan batas terluar dari sebuah bangun datar atau garis yang membatasi sebuah bangun datar. Titik sudut dapat diartikan sebagai titik perpotongan antara tiga buah sisi.

2) Segitiga

Segitiga adalah poligon (segi banyak) yang memiliki tiga sisi. Segitiga merupakan bangun geometri yang dibentuk oleh tiga buah ruas garis yang berpotongan pada tiga titik sudut.



Gambar 2.19 Segitiga

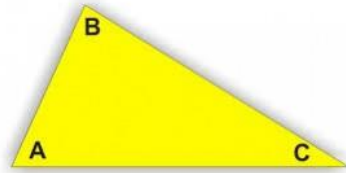
Umumnya salah satu sisi segitiga disebut dengan alas. Alas segitiga merupakan salah satu sisi yang tegak lurus dengan tinggi segitiga. Tinggi segitiga merupakan garis yang tegak lurus dan melalui titik sudut yang berhadapan dengan alasnya.

Segitiga dapat dikelompokkan berdasarkan panjang sisinya dan berdasarkan besar sudutnya. Berdasarkan panjang sisinya, segitiga dapat dibagi menjadi:

1) *Segitiga sebarang*, adalah segitiga yang semua sisinya tidak sama panjang.

Segitiga sebarang memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- Panjang ketiga sisinya berlainan.
- Besar ketiga sudutnya tidak sama.
- Tidak memiliki simetri lipat.

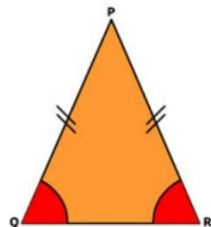


Gambar 2.20 Segitiga Sebarang

2) *Segitiga sama kaki*, adalah segitiga yang memiliki dua buah sisi yang sama panjang,

Segitiga sama kaki memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- Dua buah sisinya sama panjang (panjang sisi PQ = panjang sisi PR).
- Mempunyai dua buah sudut sama besar (sudut PQR = sudut PRQ).
- Memiliki satu simetri lipat.
- Tidak memiliki simetri putar.

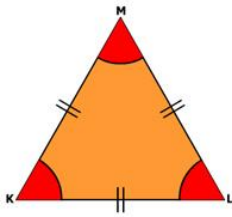


Gambar 2.21 Segitiga Sama Kaki

3) *Segitiga sama sisi*, adalah segitiga yang semua sisinya sama panjang.

Segitiga sama sisi memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

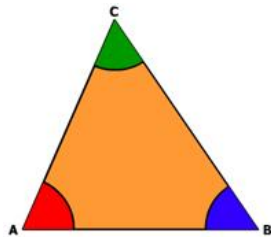
- Ketiga sisinya sama panjang (panjang sisi KL = panjang sisi LM = panjang sisi MK).
- Sudut-sudutnya sama besar, yaitu masing-masing 60° (besar sudut MKL = besar sudut KLM = besar sudut LMK).
- Memiliki tiga simetri lipat.
- Memiliki tiga simetri putar.



Gambar 2.22 Segitiga Sama Sisi

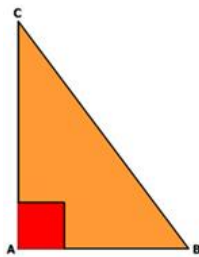
Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dapat dibagi menjadi;

- 1) *Segitiga lancip*, adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip atau besar masing-masing sudutnya kurang dari 90^0 .



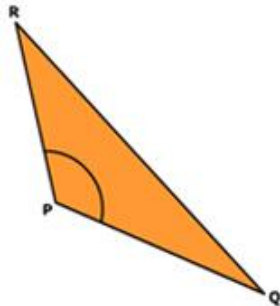
Gambar 2.23 Segitiga Lancip

- 2) *Segitiga siku-siku*, adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku atau besar salah satu sudutnya 90^0 .



Gambar 2.24 Segitiga Siku-Siku

- 3) *Segitiga tumpul*, adalah segitiga yang salah satu sudutnya tumpul atau salah satu sudutnya memiliki besar sudut antara 90^0 sampai 180^0 .



Gambar 2.25 Segitiga Tumpul

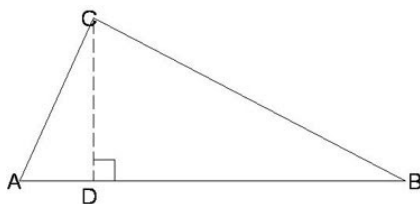
Tabel 2.1 Keterkaitan Antar Segitiga

Jenis segitiga	Segitiga lancip	Segitiga tumpul	Segitiga siku-siku
Segitiga sama sisi	Segitiga lancip sama sisi	-	-
Segitiga sama kaki	Segitiga lancip sama kaki	Segitiga tumpul sama kaki	Segitiga siku-siku sama kaki
Segitiga sebarang	Segitiga lancip sebarang	Segitiga tumpul sebarang	Segitiga siku-siku sebarang

Pada bagian selanjutnya akan dijelaskan mengenai garis istimewa pada segitiga. Terdapat 3 garis istimewa pada segitiga yang akan dibahas pada bagian ini, yaitu garis tinggi, garis bagi, dan garis berat.

1. Garis tinggi

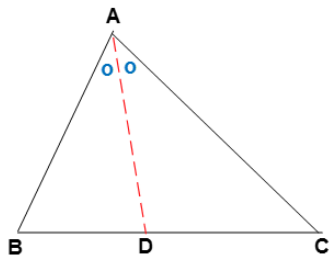
Garis tinggi merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya secara tegak lurus atau sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membentuk sudut 90^0 . Perhatikan gambar berikut ini, pada gambar tersebut garis CD merupakan salah satu garis tinggi pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis tinggi. Dapatkah Anda menemukan dan menggambar garis tinggi yang lain?



Gambar 2.26 Garis Tinggi

2. Garis bagi

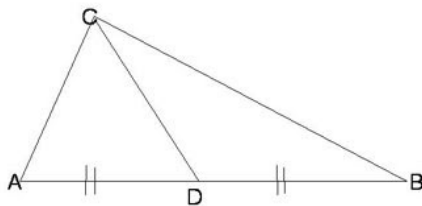
Garis bagi merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membagi sudut tersebut sama besar. Perhatikan gambar berikut ini, garis AD merupakan salah satu contoh garis bagi pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis bagi. Coba Anda gambarkan garis bagi yang lainnya!



Gambar 2.27 Garis Bagi

3. Garis berat

Garis berat merupakan sebuah garis yang menghubungkan satu titik sudut ke sisi dihadapannya dan membagi sisi dihadapannya sama panjang. Perhatikan gambar berikut ini, garis CD merupakan salah satu contoh garis berat pada segitiga ABC. Pada sebuah segitiga terdapat tiga buah garis berat. Coba Anda gambarkan garis berat yang lainnya!



Gambar 2.28 Garis Berat

Pada segitiga sama sisi, garis tinggi akan sama dengan garis bagi dan juga sama dengan garis berat. Coba Anda buktikan hal tersebut!

Setelah Anda menemukan garis tinggi, garis berat, dan garis bagi yang lain, garis-garis tersebut berpotongan di satu titik tertentu, yang kemudian disebut dengan titik tinggi, titik berat, dan titik bagi. Kemudian, apa yang dimaksud dengan titik tinggi, titik bagi, dan titik berat!

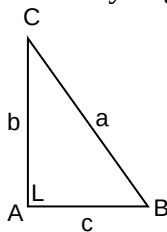
Setelah mempelajari tentang garis istimewa pada segitiga, selanjutnya adalah besar sudut pada segitiga. Besar seluruh sudut pada segitiga atau jumlah besar sudut pada segitiga adalah 180^0 . Pembuktian besar seluruh sudut pada suatu segitiga 180^0 , dapat dilakukan dengan langkah berikut ini: Siswa diminta untuk menggambar sebuah segitiga (dengan ukuran bebas dalam arti tidak ditentukan oleh guru), kemudian siswa diminta untuk merobek daerah sudut pada masing-

masing titik sudut segitiga (seperti pada gambar), dan menempelkannya sehingga terlihat bahwa membentuk sudut 180° .



Gambar 2.29 Jumlah Besar Sudut pada Segitiga

Dalil Pythagoras:



Gambar 2.30 Segitiga Siku-Siku

Gambar tersebut adalah segitiga siku-siku ABC. Sisi AB dan AC adalah sisi siku-siku, sedangkan sisi BC disebut hipotenusa atau sisi miring.

Dalil Pythagoras untuk segitiga siku-siku ABC di atas dirumuskan menjadi:

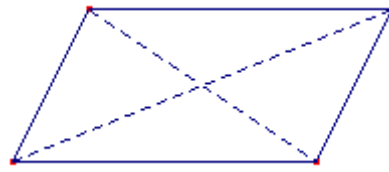
$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 \leftrightarrow BC = \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2}$$

3) Segiempat

Segiempat adalah poligon yang memiliki empat sisi. Segiempat dapat dibentuk dari empat buah garis dan empat buah titik dengan tiga titik tidak kolinear (tidak terletak pada satu garis lurus).

a) Jajargenjang

Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Jajargenjang dapat dibentuk dari gabungan suatu segitiga dan bayangannya setelah diputar setengah putaran dengan pusat titik tengah salah satu sisinya.



Gambar 2.31 Jajargenjang

Beberapa sifat jajargenjang, antara lain:

- 1) Pada setiap jajargenjang, sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
- 2) Pada setiap jajargenjang, sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- 3) Jumlah dua sudut yang berdekatan dalam jajargenjang adalah 180^0 .

Nah, bagaimana jika terdapat sebuah bangun jajargenjang tetapi besar salah satu sudutnya adalah 90^0 , menurut Saudara, bangun apakah itu?

b) Persegi Panjang

Persegi panjang dapat didefinisikan sebagai segiempat yang kedua pasang sisinya sejajar dan sama panjang serta salah satu sudutnya 90^0 . Berdasarkan definisi persegi panjang dan jajargenjang yang telah dikemukakan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa persegi panjang adalah jajargenjang yang besar salah satu sudutnya 90^0 .

Beberapa sifat persegi panjang:

- 1) Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar.
- 2) Setiap sudutnya sama besar, yaitu 90^0 .
- 3) Diagonal-diagonalnya sama panjang.
- 4) Diagonal-diagonalnya berpotongan dan saling membagi dua sama panjang.

c) Persegi

Persegi dapat didefinisikan sebagai segiempat yang semua sisinya sama panjang dan besar semua sudutnya 90^0 . Berdasarkan definisi persegi dan persegi panjang yang telah dikemukakan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa persegi adalah persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang.

Beberapa sifat persegi adalah:

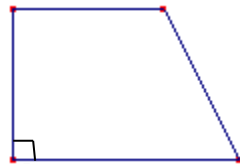
- 1) Sisi-sisinya sama panjang.
- 2) Diagonalnya sama panjang.

- 3) Diagonalnya saling berpotongan dan membagi dua sama panjang.
- 4) Sudut-sudut dalam setiap persegi dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.
- 5) Diagonal-diagonalnya merupakan sumbu simetri.
- 6) Diagonal-diagonalnya berpotongan tegak lurus.

d) Trapezium

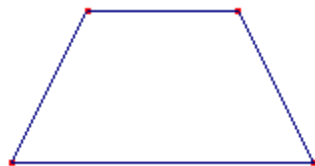
Trapezium adalah segiempat yang memiliki sepasang sisi sejajar. Trapezium dapat dikelompokkan menjadi:

- 1) *Trapezium siku-siku*, adalah trapezium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar dengan dua sudut yang besarnya 90^0 .



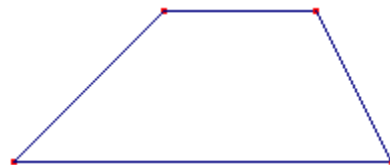
Gambar 2.32 Trapezium Siku-Siku

- 2) *Trapezium sama kaki*, adalah trapezium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar dan sepasang sisi yang lain sama panjang.



Gambar 2.33 Trapezium Sama Kaki

- 3) *Trapezium sebarang*, adalah trapezium yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar yang tidak sama panjang serta besar sudutnya tidak ada yang 90^0 .



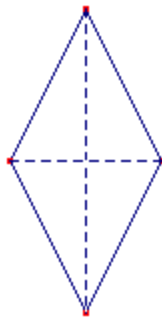
Gambar 2.34 Trapezium Sebarang

Pada suatu trapezium, jumlah sudut yang berdekatan adalah 180^0 .

e) Belah Ketupat

Belah ketupat merupakan segiempat yang khusus. Belah ketupat didefinisikan sebagai segiempat dengan sisi yang berhadapan sejajar, keempat sisinya sama

panjang, dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Berdasarkan definisi tersebut, dan definisi pada jajargenjang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka dapat disebut belah ketupat merupakan jajargenjang yang semua sisinya sama panjang. Oleh karena itu, semua sifat yang berlaku pada jajargenjang berlaku pula pada belah ketupat. Keistimewaan belah ketupat adalah dapat dibentuk dari gabungan segitiga sama kaki dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap alasnya.



Gambar 2.35 Belah Ketupat

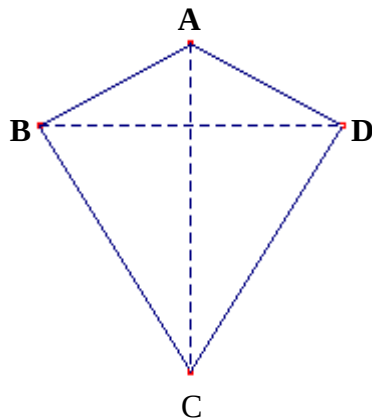
Berikut ini adalah sifat-sifat khusus belah ketupat:

- 1) Semua sisinya sama panjang.
- 2) Diagonal-diagonal belah ketupat menjadi sumbu simetri.
- 3) Kedua diagonalnya saling berpotongan tegak lurus dan saling membagi dua sama panjang.
- 4) Sudut-sudut yang berhadapan sama besar dan dibagi dua sama besar oleh diagonal-diagonalnya.

Nah, bagaimana jika terdapat sebuah bangun belah ketupat tetapi besar salah satu sudutnya adalah 90° , menurut Saudara bangun apakah itu?

f) Layang-layang

Layang-layang adalah segiempat yang mempunyai sisi yang berdekatan sama panjang dan kedua diagonalnya saling tegak lurus. Layang-layang dapat dibentuk dari dua segitiga sama kaki yang alasnya sama panjang dan saling berimpit atau dua segitiga sebarang yang kongruen dan berimpit pada alasnya. (definisi kongruen akan dibahas pada bab selanjutnya).



Gambar 2.36 Layang-Layang

Beberapa sifat layang-layang:

- 1) Pada setiap layang-layang sepasang sisinya sama panjang.
- 2) Pada setiap layang-layang terdapat sepasang sudut yang berhadapan sama besar.
- 3) Salah satu diagonal layang-layang merupakan sumbu simetri.
- 4) Salah satu diagonal layang-layang membagi dua sama panjang dan tegak lurus terhadap diagonal lainnya.

Contoh kasus:

Berdasarkan paparan yang telah disajikan, menurut Anda apakah pernyataan berikut ini benar?

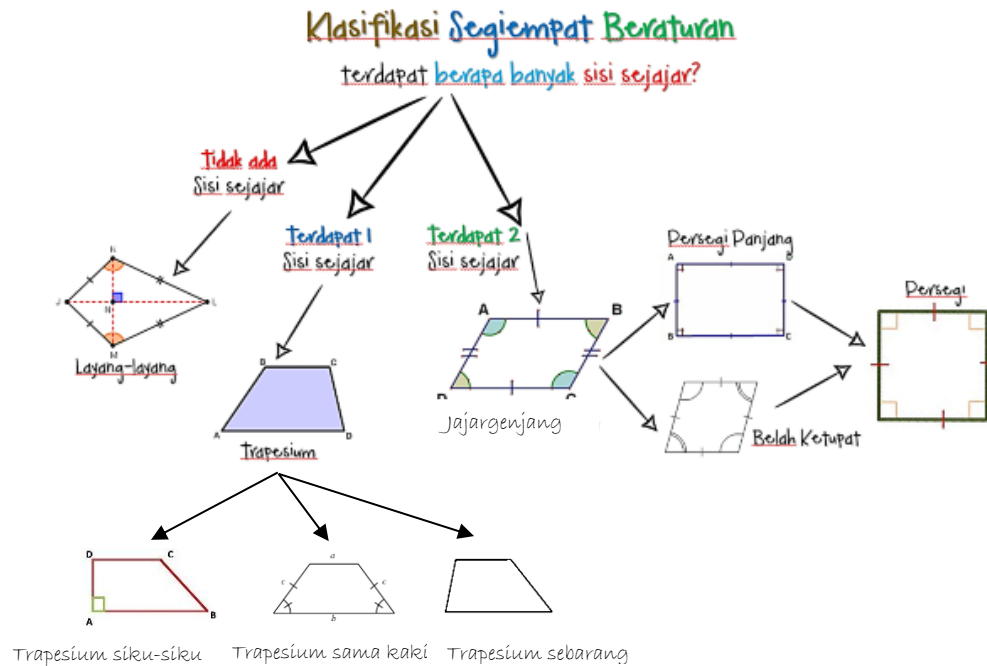
- a. Persegi merupakan bagian dari persegi panjang.
- b. Belah ketupat merupakan bagian dari persegi.
- c. Jajargenjang merupakan bagian dari persegi panjang.

Jawaban:

- a. Pernyataan “persegi merupakan bagian dari persegi panjang” adalah benar. Alasannya adalah karena semua sifat pada persegi panjang juga merupakan sifat pada persegi, yaitu pada persegi panjang berlaku sifat sepasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, pada persegi dapat berlaku hal tersebut. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, contohnya pada persegi berlaku sifat memiliki empat buah sisi yang sama panjang, sifat tersebut tidak berlaku pada persegi panjang. Kesimpulannya adalah pernyataan tersebut benar.

Berdasarkan contoh alasan pada poin a, Anda juga dapat menjawab poin b dan poin c.

Hubungan antara bangun datar yang dapat dilihat pada bagan berikut ini:

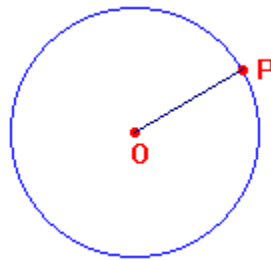


Bagan 2.1 Klasifikasi Segiempat Beraturan

Berdasarkan bagan tersebut, coba Anda definisikan dengan bahasa sendiri masing-masing bangun datar segiempat beraturan tersebut!

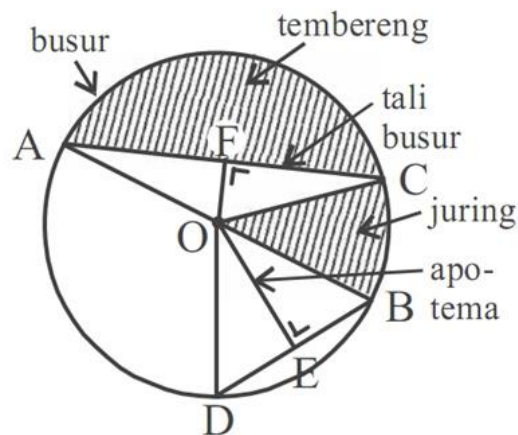
g) Lingkaran

Lingkaran merupakan kurva tertutup sederhana. Jika kita membuat sebuah segi- n beraturan dengan n tak terhingga maka akan membentuk sebuah lingkaran. Lingkaran dapat didefinisikan sebagai tempat kedudukan dari kumpulan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik pusat. Jarak titik P ke titik pusat O disebut dengan jari-jari lingkaran. Diameter sebuah lingkaran merupakan dua kali jari-jari lingkaran.



Gambar 2.37 Lingkaran

Berikut adalah gambar bagian-bagian dari lingkaran



Gambar 2.38 Unsur-Unsur Lingkaran

c. Keliling dan Luas Bangun Datar

1) Pengukuran Panjang

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai pengukuran panjang, maka akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai pengukuran. Pengukuran merupakan sebuah proses atau suatu kegiatan untuk mengidentifikasi besar kecilnya, panjang pendeknya, atau berat ringannya suatu objek. Pengukuran dalam modul ini meliputi pengukuran panjang, luas, volume, dan berat (yang akan dibahas secara bertahap). Pengukuran panjang dapat dilakukan dengan menggunakan satuan tidak baku dan dengan menggunakan satuan baku.

a. Pengukuran Tidak Baku

Pengukuran panjang dengan menggunakan satuan tidak baku merupakan sebuah pengukuran yang memungkinkan perbedaan hasil karena menggunakan alat ukur yang tidak standar. Beberapa contoh pengukuran

dengan menggunakan satuan tidak baku untuk mengukur panjang antara lain:

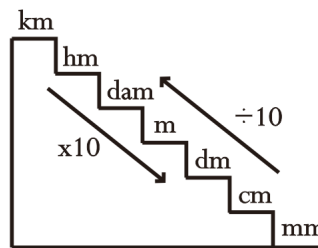
- a) Jengkal adalah pengukuran yang disesuaikan dengan jarak paling panjang antara ujung ibu jari tangan dengan ujung jari kelingking.
- b) Hasta adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran sepanjang lengan bawah dari siku sampai ujung jari tengah.
- c) Depa adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran sepanjang kedua belah tangan dari ujung jari tengah kiri sampai ujung jari tengah kanan.
- d) Kaki adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah kaki.
- e) Tapak adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah tapak.
- f) Langkah adalah pengukuran yang dilakukan dengan ukuran panjang sebuah langkah.

Mengajarkan pengukuran menggunakan satuan tidak baku pada siswa dapat kita mulai dengan meminta siswa mengukur panjang meja dengan menggunakan jengkal ataupun depa. Hasil yang diperoleh siswa tentulah berbeda-beda sesuai dengan ukuran masing-masing.

b. Pengukuran Baku

Pengukuran dengan menggunakan satuan baku merupakan sebuah pengukuran yang hasilnya tetap atau standar. Terdapat dua acuan pengukuran baku yang digunakan yaitu pengukuran sistem Inggris dan pengukuran sistem Metrik. Pengukuran sistem Inggris dikembangkan dari benda-benda yang ada di sekitar kita dan telah distandarkan. Beberapa contoh satuan baku pengukuran panjang sistem Inggris antara lain *yard*, *feet*, dan *inchi*. Beberapa contoh satuan baku pengukuran berat dan volume sistem Inggris antara lain *pound*, *cup*, dan *gallon*. Pembelajaran di Sekolah Dasar di Indonesia lebih menggunakan pengukuran baku sistem metrik. Sistem metrik dikembangkan secara sistematis dan memiliki standar.

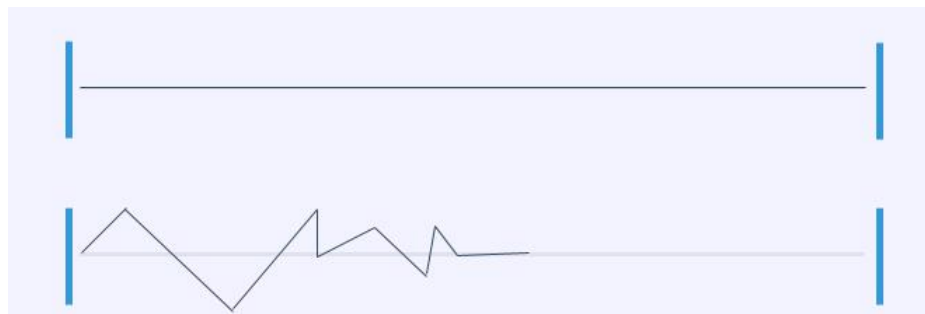
Satuan baku yang berlaku untuk mengukur panjang sebuah benda ataupun jarak adalah kilometer (km), hektometer (hm), dekameter (dam), meter (m), desimeter (dm), centimeter (cm), dan millimeter (mm). Mengajarkan pengukuran panjang pada siswa Sekolah Dasar dapat dimulai dengan meminta siswa mengukur benda-benda di sekitar menggunakan penggaris ataupun alat meteran. Misalkan siswa diminta untuk mengukur sebuah meja menggunakan penggaris dan alat meteran. Hasil pengukuran menggunakan penggaris adalah $100cm$, dan hasil pengukuran menggunakan alat meteran adalah $1m$, berdasarkan hasil tersebut siswa dapat menyimpulkan bahwa $1m = 100cm$. Perhatikan bagan di bawah ini:



Bagan 2.2 Konversi Satuan Panjang

Mengkonversi satuan panjang dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran panjang maka dikalikan 10, dan setiap naik 1 satuan ukuran panjang maka dibagi 10.

Seorang siswa saat belajar tentang pengukuran panjang diharapkan dapat menguasai hukum kekekalan panjang. Seorang siswa dikatakan memahami hukum kekekalan panjang jika saat siswa dapat menyimpulkan bahwa panjang seutas tali akan tetap meskipun tali tersebut dilengkungkan (seperti ilustrasi gambar berikut ini).



Gambar 2.39 Ilustrasi Hukum Kekekalan Panjang

2) Keliling Bangun Datar



Perhatikan gambar kurva tersebut! Jika diperhatikan, saat menggambar kurva tersebut, sebuah titik akan bergerak mengelilingi kurva dari awal sampai bertemu lagi di titik awal tadi. Jarak perpindahan titik tersebut yang kita sebut sebagai keliling. Keliling adalah jarak perpindahan titik dari lintasan awal sampai ke lintasan akhir (titik awal dan titik akhir adalah titik yang sama). Untuk mengilustrasikan konsep keliling, kita bisa mengajak siswa untuk membayangkan atau menceritakan saat sedang berlari mengelilingi lapangan. Keliling lapangan akan sama dengan jarak tempuh siswa mengelilingi lapangan dari titik awal sampai kembali lagi ke titik tersebut.



Nah, sekarang bagaimana jika terdapat sebuah kasus, misalkan siswa akan diminta untuk mengukur jarak yang ditempuhnya untuk mengelilingi taman (misalkan tamannya berbentuk seperti gambar di samping. Hal yang mungkin dilakukan siswa adalah mengukur jarak setiap sisi taman kemudian menjumlahkannya. Dapat disimpulkan bahwa keliling adalah jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun. Hal ini otomatis berlaku juga untuk semua jenis bangun datar, sehingga pada bahasan ini penulis tidak secara khusus membahas rumus keliling setiap jenis segitiga dan segiempat.

Menghitung keliling pada segitiga dan segiempat dapat dilakukan dengan cara menjumlahkan semua panjang sisi terluarnya.

Kasus berbeda terjadi saat kita ingin menentukan keliling lingkaran. Saat menentukan keliling lingkaran, definisi keliling yang merupakan jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun agaklah tidak tepat. Untuk menentukan keliling lingkaran, kita dapat mengajak siswa melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Siswa kita minta untuk menyiapkan beberapa benda yang permukaannya berbentuk lingkaran.

2. Siswa mengukur panjang diameter dari setiap benda.
3. Siswa mengukur panjang keliling lingkaran dengan menggunakan tali.
4. Siswa mencatat semua hasil pengukuran yang dilakukan, misalnya dapat berupa tabel seperti di bawah ini:

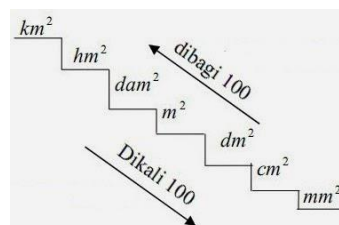
No	Nama Benda	Diameter (d)	Keliling	$\frac{\text{keliling}}{\text{diameter}}$
1				
2				
3				
4				

5. Siswa menentukan $\frac{\text{keliling}}{\text{diameter}}$, dan rata-rata dari data tersebut (pada langkah ini hasil yang diharapkan adalah yang mendekati nilai phi ($\pi = 3,14 \dots = \frac{22}{7}$), mengapa mendekati? Karena memungkinkan saat pengukuran diameter dan keliling dengan bantuan tali terdapat sedikit kesalahan pengukuran).

Karena $\pi = \frac{\text{keliling}}{\text{diameter}}$ maka keliling = $\pi \times \text{diameter} = \pi d = 2\pi r$

3) Pengukuran Luas

Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur luas adalah $km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2$. Perhatikan bagan di bawah ini:

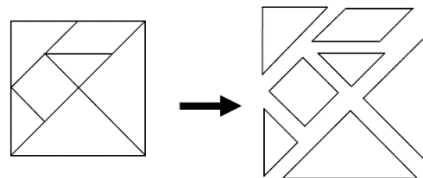


Bagan 2.3 Konversi Satuan Luas

Mengkonversi satuan luas dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran luas maka dikalikan 100, dan setiap naik 1 satuan ukuran luas maka dibagi 100.

Selain satuan baku yang telah disebutkan, satuan baku lain untuk mengukur luas adalah *are* dan *hektar (ha)*. 1 *are* merupakan satuan dasar untuk mengukur luas yang setara dengan ukuran 100 m^2 atau $1 \text{ are} = 100 \text{ m}^2$ dan 1 *hektar* merupakan satuan untuk mengukur luas yang setara dengan 10.000 m^2 atau $1 \text{ hektar} = 10.000 \text{ m}^2$.

Setelah memahami pengukuran luas, diharapkan siswa dapat memahami hukum kekekalan luas. Siswa yang sudah menguasai hukum kekekalan luas akan menyatakan bahwa luas daerah yang ditutupi suatu benda tetap sama meskipun letak bendanya diubah. Perhatikan gambar tangram berikut ini:

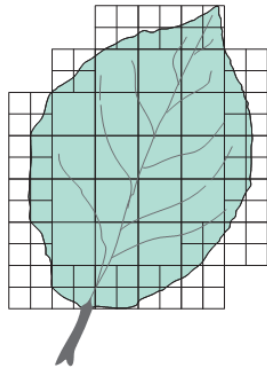


Gambar 2.40 Tangram

Siswa yang telah menguasai hukum kekekalan luas akan menyatakan bahwa luas daerah persegi (gambar sebelah kiri) akan sama dengan jumlah luas daerah bangun-bangun yang terdapat di sebelah kanan.

4) Luas Daerah Bangun Datar

Konsep luas sering kita dengar dan gunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalkan jika seseorang akan menjual tanah maka ukuran yang digunakan adalah luas. Luas adalah sesuatu yang menyatakan besarnya daerah sebuah kurva tertutup sederhana. Sebagai contohnya, bagaimanakah cara kita membimbing siswa menghitung luas daun seperti pada gambar berikut ini?



Untuk menghitung luas daun tersebut tentulah tidak mudah. Langkah pertama yang dapat kita lakukan adalah meminta siswa untuk menjiplak daun tersebut pada kertas berpetak satu-satuan. Kemudian siswa akan menghitung berapa banyak persegi satuan yang tertutup oleh bangun tersebut (dengan aturan jika setengah petak atau yang tertutup maka akan dihitung satu satuan luas, dan jika kurang dari setengah petak yang tertutup maka akan kita abaikan), walaupun hasil yang diperoleh tidak sama persis (mendekati) dengan luas daun sebenarnya.

Luas adalah sebuah ukuran yang menyatakan besarnya daerah kurva atau bangun datar.

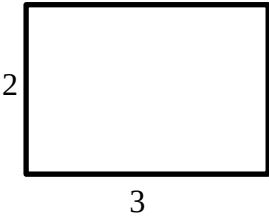
Mempelajari konsep luas, siswa juga diharapkan dapat memahami hukum kekekalan luas. Siswa yang sudah memahami hukum kekekalan luas dapat menyimpulkan bahwa luas daerah yang ditutupi suatu benda akan tetap sama meskipun letaknya diubah. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar pembuktian luas jajargenjang.

a) Luas Daerah Persegi Panjang

Luas daerah persegi panjang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi persegi panjang tersebut.

Untuk membantu siswa menemukan rumus luas daerah persegi panjang, salah satu cara yang dapat dilakukan sebagai berikut:

Tabel 2.2. Rumus Luas Persegi Panjang

Persegi Panjang	Panjang (p)	Lebar (l)	Persegi Satuan	Keterangan
	2	1	2	Jika diketahui panjangnya 2 dan lebarnya 1, maka persegi satuannya 2. Mengapa demikian? Kita buktikan dengan cara menghitung persegi satuannya, yaitu 2 dihasilkan dari 2 dikali 1
	2	3	6	<i>Menurut Anda mengapa banyak persegi satuan ada 6?</i>
Selanjutnya dapat dilanjutkan sendiri.				

Siswa tidak hanya diberikan dua contoh persegi panjang saja, tetapi siswa boleh menentukan ukuran dari persegi panjang yang lain. Kemudian siswa akan dibimbing untuk mengidentifikasi antara panjang, lebar, dan banyaknya persegi satuan yang menutupinya. Setelah menemukan hubungannya siswa dapat menyatakan bahwa:

$$\text{Luas daerah persegi panjang} = \text{panjang} \times \text{lebar}.$$

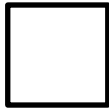
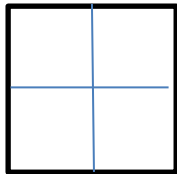
b) Luas Daerah Persegi

Luas daerah persegi adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi persegi tersebut.

Sama halnya dengan langkah yang dilakukan saat menemukan rumus luas daerah persegi panjang, cara serupa juga dapat kita lakukan untuk membimbing siswa menemukan rumus luas daerah persegi. Untuk

membantu siswa menemukan rumus tersebut, salah satu cara yang dapat dilakukan sebagai berikut:

Tabel 2.3. Rumus Luas Persegi

Persegi	Panjang sisi (s)	Persegi Satuan	Keterangan
1 	1	1	Jika diketahui panjang sisi 1, maka persegi satuannya 1.
2  2	2	4	Banyak persegi satuan pada persegi dengan panjang sisi 2 adalah 4.
Selanjutnya dapat dilanjutkan sendiri.			

Siswa kemudian diminta untuk mengidentifikasi hubungan antara panjang sisi dengan banyak persegi satuan yang menutupinya. Setelah menemukan hubungannya, siswa dapat menuliskan bahwa:

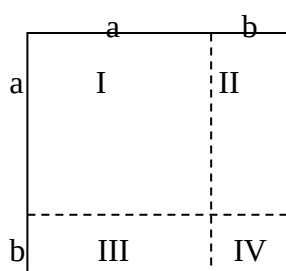
$$\text{Luas daerah persegi} = \text{sisi} \times \text{sisi}$$

Contoh kasus:

Tentukan luas persegi jika panjang sisi persegi tersebut adalah $(a + b)$!

Jawab:

Untuk menentukan luas persegi tersebut, perhatikan gambar berikut ini:



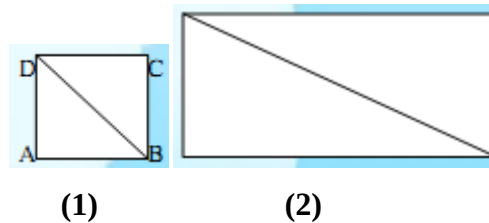
$$\text{Luas} = \text{Luas I} + \text{Luas II} + \text{Luas III} + \text{Luas IV}$$

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 + 2ab + b^2$$

C) Luas Daerah Segitiga

Luas daerah segitiga adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi segitiga tersebut.

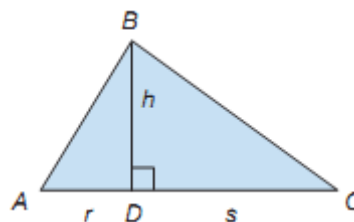


Gambar 2.41 Ilustrasi Luas Segitiga Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Perhatikan kedua bangun tersebut, segitiga (1) dan segitiga (2). Mengajarkan luas daerah segitiga, kita dapat meminta siswa menggambarkan sebuah persegi panjang, kemudian persegi panjang tersebut dipotong menurut salah satu diagonalnya (perhatikan gambar di atas), siswa akan mendapatkan dua buah segitiga dengan ukuran dan besar yang sama persis. Untuk menghitung luas daerah segitiga, dapat diperoleh dari persegi panjang yang dibagi dua berdasarkan salah satu diagonalnya. Luas segitiga adalah setengah dari luas persegi panjang.

$$\begin{aligned}L_{ABD} &= \frac{1}{2} L_{ABCD} \\&= \frac{1}{2} AB \times AD \\&= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}\end{aligned}$$

Perhatikan gambar segitiga sebarang berikut ini:



Gambar 2.42 Ilustrasi Luas Segitiga

Menentukan luas daerah segitiga tersebut, dapat dilakukan dengan cara:

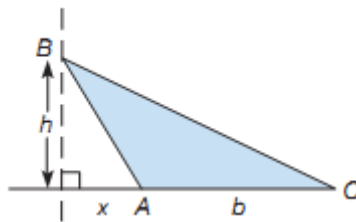
$$\begin{aligned}L_{ABC} &= L_{ABD} + L_{CBD} \\&= \frac{1}{2} (AD)(BD) + \frac{1}{2} (CD)(BD)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(AD + CD)(BD)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

Catatan: ingat kembali tentang bahasan garis tinggi pada bagian sebelumnya, dapat dituliskan “alas segitiga selalu tegak lurus dengan tinggi segitiga”.

Perhatikan gambar segitiga tumpul berikut ini!



Gambar 2.43 Ilustrasi Luas Segitiga Tumpul

Menentukan luas segitiga tersebut, dapat dilakukan dengan cara:

$$L_{ABC} = L_{LCB} - L_{LAB}$$

$$= \frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi}) - \frac{1}{2}(\text{alas})(\text{tinggi})$$

$$= \frac{1}{2}(x + b)(h) - \frac{1}{2}(x)(h)$$

$$= \frac{1}{2}(x)(h) + \frac{1}{2}(b)(h) - \frac{1}{2}(x)(h)$$

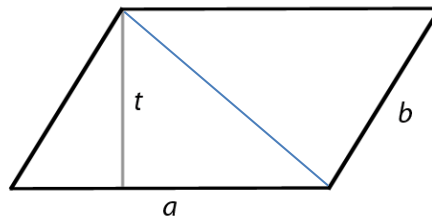
$$= \frac{1}{2}(b)(h)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

d) Luas Daerah Jajargenjang

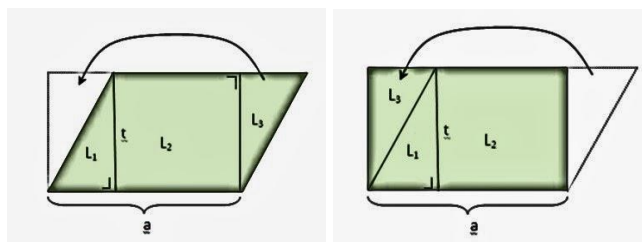
Luas daerah jajargenjang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi jajargenjang tersebut.

Menentukan luas daerah jajargenjang kita dapat menggunakan bantuan konsep luas daerah segitiga. Misalkan guru meminta siswa untuk menggambar sebuah jajargenjang, kemudian jajargenjang tersebut dipotong berdasarkan salah satu diagonalnya sehingga menjadi dua buah segitiga yang sama persis. Dengan kata lain luas daerah jajargenjang sama dengan dua kali luas segitiga. Secara matematis adalah sebagai berikut:



$$\begin{aligned}
 L_{\text{jajargenjang}} &= 2 \times L_{\Delta} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} \times a \times t \\
 &= a \times t
 \end{aligned}$$

Selain menggunakan bantuan konsep luas daerah segitiga, kita juga dapat menggunakan bantuan konsep luas daerah persegi panjang. Proses yang dapat dilakukan siswa adalah sebagai berikut: siswa menggambarkan sebuah jajargenjang, jajargenjang tersebut dibagi menjadi 3 daerah, dua buah segitiga, dan satu persegi panjang. Apabila salah satu segitiga dipotong dan ditempelkan sehingga sisi miring dua buah segitiga tersebut saling berhimpit, maka akan terbentuk sebuah persegi panjang baru (perhatikan gambar di bawah ini). Dengan kata lain, luas jajargenjang akan sama dengan luas persegi panjang dengan ukuran alas dan tinggi yang sama dengan alas dan tinggi jajargenjang tersebut.



Gambar 2.44 Ilustrasi Luas Daerah Jajargenjang Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Berdasarkan gambar tersebut:

Luas daerah jajargenjang = luas daerah persegi panjang

$$p \times l = a \times t$$

$$L_{\text{daerah jajargenjang}} = a \times t.$$

Saat kita mengajarkan proses menemukan luas jajargenjang seperti cara di atas, dan siswa dapat memahaminya, artinya siswa telah menguasai hukum kekekalan luas.

Jadi, untuk setiap jajargenjang, dengan alas **a**, tinggi **t**, serta luas daerah **L**, maka berlaku:

$$L_{\text{daerah jajargenjang}} = a \times t.$$

e) Luas Daerah Belah Ketupat

Luas daerah belah ketupat adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi belah ketupat tersebut.

Untuk menemukan rumus luas daerah belah ketupat guru dapat membimbing siswa dengan cara: siswa diminta menggambar belah ketupat beserta diagonal-diagonalnya, sehingga akan membentuk 4 daerah segitiga (perhatikan gambar), keempat segitiga tersebut disusun sehingga menjadi sebuah persegi panjang dengan panjang sama dengan diagonal 1 belah ketupat dan lebar sama dengan $\frac{1}{2}$ diagonal 2 belah ketupat. Dapat ditulis:

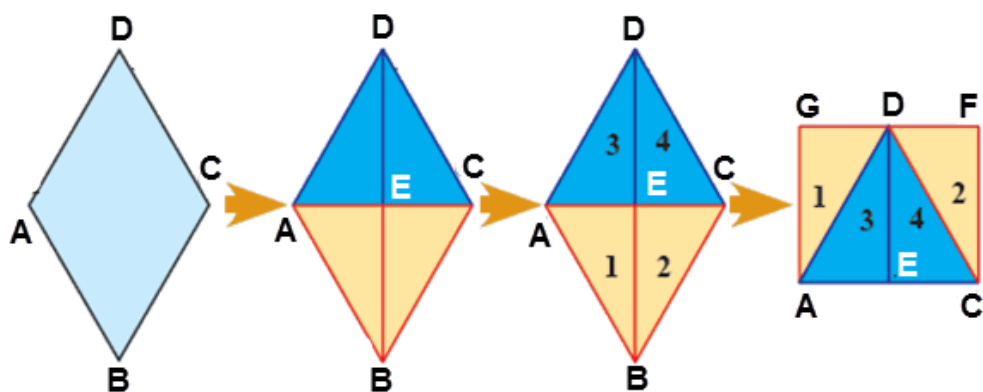
$$\text{Luas daerah } ABCD = \text{Luas daerah persegi panjang } ACFG$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = p \times l$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = AC \times DE$$

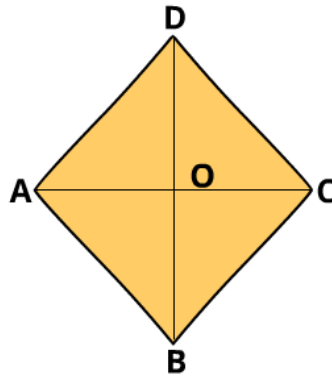
$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

$$\text{Luas daerah belah ketupat} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$



Gambar 2.45 Ilustrasi Luas Daerah Belah Ketupat Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Selain dengan cara tersebut, kita tahu bahwa belah ketupat dapat dibentuk dari dua buah segitiga yang kongruen, sehingga untuk menemukan luas belah ketupat sebagai berikut:



Gambar 2. 46 Luas Belah Ketupat

Catatan: AC = diagonal 1, BD = diagonal 2

$$\text{Luas daerah } ABCD = L_{ABC} + L_{ACD}$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times AC \times (BO + DO)$$

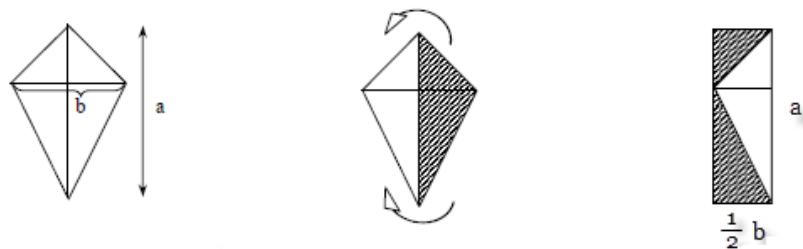
$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

$$\text{Luas daerah belah ketupat} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

f) Luas Daerah Layang-layang

Luas daerah layang-layang adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi layang-layang tersebut.

Untuk menemukan luas daerah layang-layang perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.47 Ilustrasi Luas Layang-Layang Berdasarkan Luas Segitiga

Langkah yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut: siswa diminta untuk menggambar layang-layang beserta diagonalnya (diagonal 1 = a , dan diagonal 2 = b). Siswa diminta melipat layang-layang tersebut menurut diagonal terpanjang dan mengguntingnya. Setelah digunting tempelkan sehingga membentuk sebuah persegi panjang dengan ukuran panjang sama dengan diagonal terpanjang layang-layang dan lebar sama dengan $\frac{1}{2}$ diagonal terpendek layang-layang. Dapat ditulis:

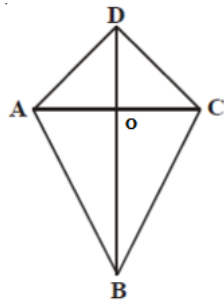
Luas daerah layang-layang = Luas daerah persegi panjang

Luas daerah layang-layang = $p \times l$

Luas daerah layang-layang = $a \times \frac{1}{2}b$

Luas daerah layang-layang = $\frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$

Layang-layang juga dapat dibentuk dari dua buah segitiga, sehingga menemukan rumus luas daerah layang-layang dapat dilakukan dengan cara:



Catatan: AC = diagonal 1, BD = diagonal 2

$Luas\ daerah\ ABCD = L_{ABC} + L_{ACD}$

$Luas\ daerah\ ABCD = \frac{1}{2} \times AC \times BO + \frac{1}{2} \times AC \times DO$

$Luas\ daerah\ ABCD = \frac{1}{2} \times AC \times (BO + DO)$

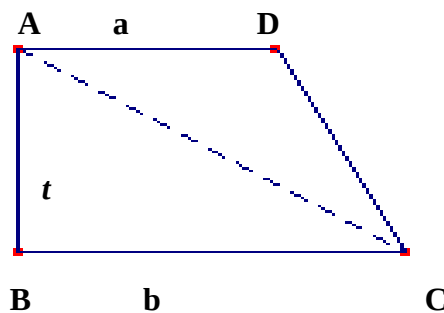
$Luas\ daerah\ ABCD = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$

$Luas\ daerah\ layang-layang = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$

g) Luas Daerah Trapesium

Luas daerah trapesium adalah ukuran yang menyatakan besarnya daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi trapesium tersebut.

Trapesium dapat dibentuk salah satunya dari dua buah segitiga (perhatikan gambar di bawah ini), sehingga untuk menemukan rumus luas daerah trapesium, kita dapat menarik garis diagonal sehingga membagi daerah trapesium menjadi dua buah segitiga. Trapesium $ABCD$ terbagi menjadi dua bagian yaitu $\triangle ABC$ (dengan alas b dan tinggi t) dan $\triangle ADC$ (dengan alas a dan tinggi t).



$$\text{Luas daerah } ABCD = L_{ABC} + L_{ACD}$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times b \times t + \frac{1}{2} \times a \times t$$

$$\text{Luas daerah } ABCD = \frac{1}{2} \times t \times (a + b)$$

$$\text{Luas daerah } ABCD$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{tinggi} \times \text{jumlah dua panjang sisi sejajar}$$

$$\text{Luas daerah trapesium}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{jumlah dua panjang sisi sejajar} \times \text{tinggi}$$

h) Luas Daerah Lingkaran

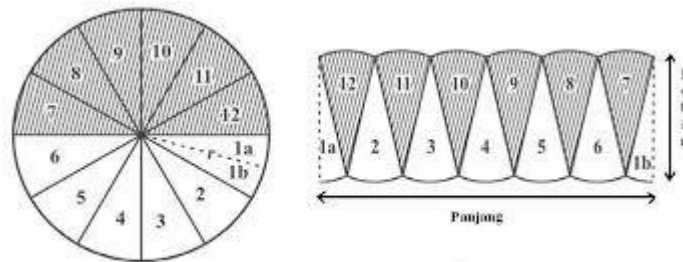
Luas daerah lingkaran merupakan luas daerah yang dibatasi oleh keliling lingkaran.

Menemukan rumus luas daerah lingkaran dapat menggunakan bantuan dari berbagai konsep luas daerah bangun datar yang lain atau dengan menerapkan dalil konektivitas Bruner. Langkah pertama yang dilakukan

adalah membagi lingkaran menjadi beberapa juring lingkaran kemudian menyusunnya menjadi bentuk bangun datar yang lain.

1. Menyusun juring lingkaran menjadi bentuk persegi panjang.

Misalkan, diketahui sebuah lingkaran yang dibagi menjadi 12 buah juring yang sama bentuk dan ukurannya. Kemudian, salah satu juringnya dibagi dua lagi sama besar. Potongan-potongan tersebut disusun sedemikian rupa sehingga membentuk persegi panjang.

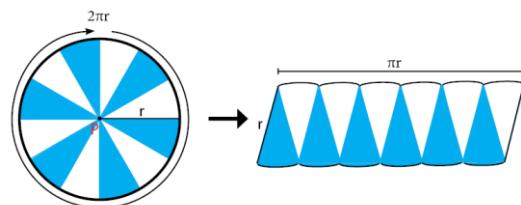


Gambar 2.48 Ilustrasi Luas Daerah Lingkaran Berdasarkan Luas Persegi Panjang

Susunan potongan-potongan juring tersebut menyerupai persegi panjang dengan ukuran panjang mendekati setengah keliling lingkaran dan lebar sebesar jari-jari, sehingga luas bangun tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 \text{Luas daerah lingkaran} &= \text{Luas daerah persegi panjang} \\
 &= p \times l \\
 &= \frac{1}{2} \text{keliling lingkaran} \times r \\
 &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \\
 &= \pi r^2
 \end{aligned}$$

2. Menyusun juring lingkaran menjadi bentuk jajargenjang



Gambar 2.49 Ilustrasi Luas Lingkaran Berdasarkan Luas Jajargenjang

$$\begin{aligned}
 \text{Luas daerah lingkaran} &= \text{Luas daerah jajargenjang} \\
 &= a \times t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \text{keliling lingkaran} \times r \\
&= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r \\
&= \pi r^2
\end{aligned}$$

Selain persegi panjang dan jajargenjang, susunan juring lingkaran dapat dibentuk menjadi segitiga, trapesium, dan belah ketupat. (coba Anda buktikan!)

Jadi, luas daerah lingkaran tersebut dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$\text{Luas daerah lingkaran} = \pi r^2$$

d. Kekongruenan dan Kesebangunan

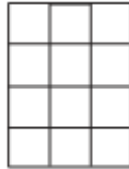
Kekongruenan dan kesebangunan merupakan sebuah konsep geometri yang membahas tentang bentuk geometri yang sama dan serupa. Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat menemukan bentuk geometri yang sama dan serupa, misalnya ubin yang dipasang pada lantai rumah kita biasanya berbentuk sama dan mempunyai ukuran yang sama. Hal inilah yang nantinya akan disebut dengan kekongruenan. Untuk lebih jelasnya akan dipaparkan pada bagian di bawah ini.

1) Kekongruenan

Kekongruenan merupakan sebuah konsep yang melibatkan dua atau lebih bangun geometri yang sama dan sebangun. Dua buah bangun geometri atau lebih dikatakan saling kongruen atau dapat dikatakan sama dan sebangun jika unsur-unsur yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut saling kongruen (sama dan sebangun).

Dua segmen garis dikatakan saling kongruen apabila panjang atau ukuran kedua garis tersebut sama panjang. Dua buah sudut atau lebih dikatakan kongruen jika ukuran sudut-sudut tersebut sama. Dua bangun atau lebih dikatakan kongruen jika bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama serta sudut yang bersesuaian sama besar (sama dan sebangun). Perhatikan gambar di bawah ini, persegi pada gambar tersebut (yang

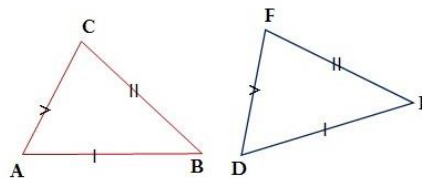
nantinya disebut persegi satuan karena memiliki ukuran panjang sisi satu satuan panjang) memiliki bentuk yang sama dan ukuran yang sama besar, sehingga persegi-persegi tersebut saling kongruen.



Gambar 2.50 Ilustrasi Persegi-Persegi Kongruen

Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen apabila unsur-unsur (panjang sisi dan besar sudut) yang bersesuaian pada segitiga-segitiga tersebut sama dan sebangun. Dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:

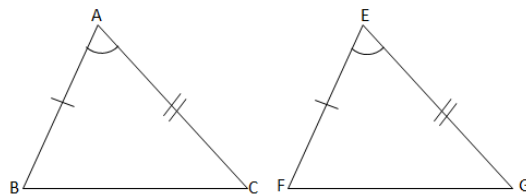
- a) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang (sisi – sisi – sisi)



Gambar 2.51 Dua Segitiga Sebangun (sisi – sisi – sisi)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF, karena sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang. (coba Anda identifikasi sisi mana saja yang saling bersesuaian?)

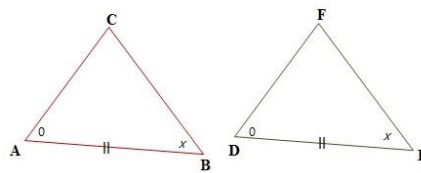
- b) Dua sisi yang bersesuaian yang sama panjang dan sudut yang diapit sama besar (sisi – sudut – sisi)



Gambar 2.52 Dua Segitiga Sebangun (Sisi – Sudut – Sisi)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga EFG, karena:

- a. Panjang sisi AB sama dengan panjang sisi EF (sisi).
 - b. Besar sudut BAC sama dengan besar sudut FEG (sudut).
 - c. Panjang sisi AC sama dengan panjang sisi EG (sisi).
- c) Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang (sudut – sisi – sudut)



Gambar 2.53 Dua Segitiga Sebangun (Sudut – Sisi – Sudut)

Gambar tersebut menunjukkan bahwa segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF, karena:

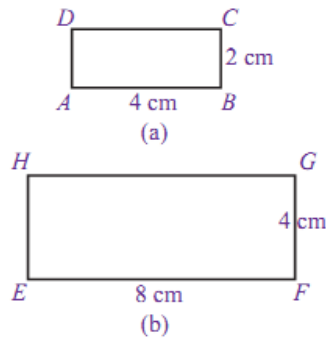
- a. Besar sudut BAC sama dengan besar sudut EDF (sudut).
- b. Panjang sisi AB sama dengan panjang sisi DE (sisi).
- c. Besar sudut ABC sama dengan besar sudut DEF (sudut).

2) Kesebangunan

Dua buah bangun geometri dikatakan saling sebangun jika unsur-unsur yang bersesuaian saling sebanding. Dua atau lebih bangun dikatakan sebangun jika mempunyai syarat:

1. Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan yang sama.
2. Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.

Sebagai ilustrasinya perhatikan gambar di bawah ini:

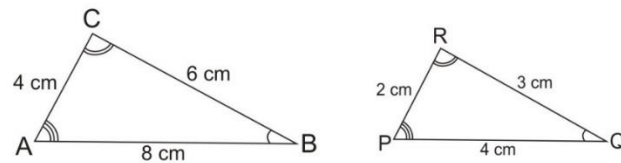


Gambar 2.54 Dua Persegi Panjang Sebangun

Pada gambar tersebut persegi panjang ABCD sebangun dengan persegi panjang EFGH, karena $AB : EF = BC : FG = CD : GH = DA : HE$.

Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:

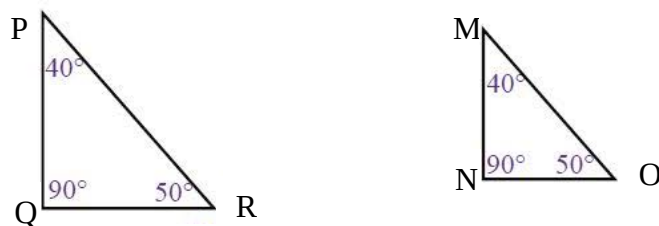
1. Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama.



Gambar 2.55 Dua Segitida Sebangun

Pada gambar tersebut diperoleh $AB : PQ = BC : QR = CA : RP$, sehingga dapat dikatakan bahwa segitiga ABC sebangun dengan segitiga PQR.

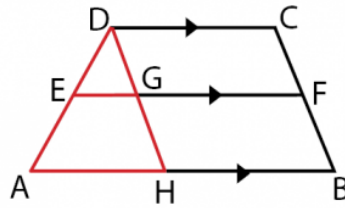
2. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar (sudut – sudut – sudut).



Gambar 2.56 Dua Segitiga Sebangun

Pada gambar tersebut diperoleh $\angle PQR = \angle MNO$, $\angle QRP = \angle NOM$, $\angle RPQ = \angle OMN$, sehingga dapat dinyatakan bahwa segitiga PQR sebangun dengan segitiga MNO.

Perhatikan gambar trapesium ABCD di bawah ini:



Gambar 2.57 Trapesium yang Sebangun

Pada gambar tersebut trapesium EFCD sebangun dengan trapesium ABCD, dan juga trapesium ABFE sebangun dengan trapesium ABCD. Misalkan berdasarkan gambar tersebut diketahui bahwa:

Panjang $AB = b$, panjang $CD = a$, panjang $CF = m$, panjang $FB = n$, maka bagaimanakah cara kita mencari panjang EF ?

Untuk menentukan panjang EF , maka kita dapat membagi bangun trapesium tersebut menjadi bangun segitiga AHD dan jajargenjang $HBCD$. Pada bangun segitiga AHD terdapat dua buah segitiga yang sebangun, yaitu segitiga EGD sebangun dengan segitiga AHD . Begitupula pada jajargenjang $HBCD$, terdapat dua buah jajargenjang yang sebangun yaitu jajargenjang $GFCD$ sebangun dengan jajargenjang $HBCD$.

Pada keterangan sebelumnya diketahui bahwa:

1. Panjang $CD = a$, maka panjang $CD = GF = HB = a$, misalkan panjang $EG = y$ dan panjang $AH = x$.
2. Panjang $CF = DG = m$, dan panjang $CB = DH = CF + FB = m + n$

Langkah selanjutnya:

(1) Mencari panjang $EG = y$

Untuk mencari y perhatikan segitiga EGD dan segitiga AHD . Berdasarkan sifat dua buah bangun sebangun maka diperoleh perbandingan:

$$\begin{aligned}\frac{EG}{AH} &= \frac{DG}{DH} \\ \frac{y}{x} &= \frac{m}{m+n} \\ y &= \frac{mx}{m+n}\end{aligned}$$

(2) Mencari panjang $EF = EG + GF = y + a$

$$y + a = \frac{mx}{m + n} + a$$

$$y + a = \frac{mx + a(m + n)}{m + n}$$

$$y + a = \frac{mx + am + an}{m + n}$$

$$y + a = \frac{(x + a)m + an}{m + n}$$

Atau

$$EF = \frac{(CD \times FB) + (AB \times FB)}{CF + FB}$$

Contoh kasus:

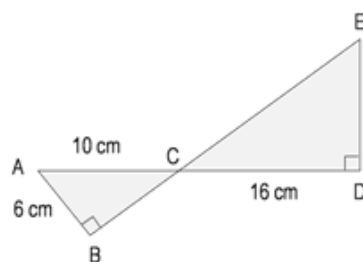
1. Berdasarkan sifat dua buah bangun yang sebangun, menurut Anda apakah bangun segiempat pasti sebangun?

(keterangan: segiempat yang dimaksud adalah segiempat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya)

Jawab:

Bangun segiempat yang telah dibahas pada bagian sebelumnya adalah persegi, persegi panjang, jajargenjang, trapesium, belah ketupat, dan layang-layang. Berdasarkan sifat-sifat bangun tersebut maka bangun-bangun yang pasti sebangun adalah persegi. Mengapa? Karena persegi memiliki sisi yang sama panjang, dan besar sudutnya masing-masing 90° , sehingga perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dan perbandingan sudut-sudut yang bersesuaian sama.

2. Perhatikan gambar berikut ini! Tentukanlah panjang ED!



Jawab:

Berdasarkan gambar tersebut:

- (1) Besar sudut ABC sama dengan besar sudut CDE.
- (2) Besar sudut BCA sama dengan besar sudut DCE (sudut bertolak belakang).
- (3) Besar sudut BAC sama dengan besar sudut DEC.
- (4) Panjang AC sebanding dengan CD.
- (5) Panjang AB sebanding dengan panjang ED.

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{CD}$$

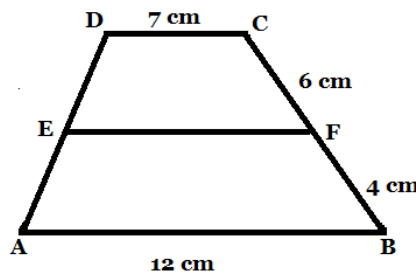
$$\frac{6}{ED} = \frac{10}{16}$$

$$ED = \frac{6 \times 16}{10}$$

$$ED = 9,6$$

Jadi, panjang ED adalah 9,6 *cm*.

3. Berdasarkan gambar di bawah ini, tentukan panjang EF!



Jawab:

$$EF = \frac{(CD \times BF) + (AB \times FC)}{BF + FC}$$

$$EF = \frac{(7 \times 4) + (12 \times 6)}{6 + 4}$$

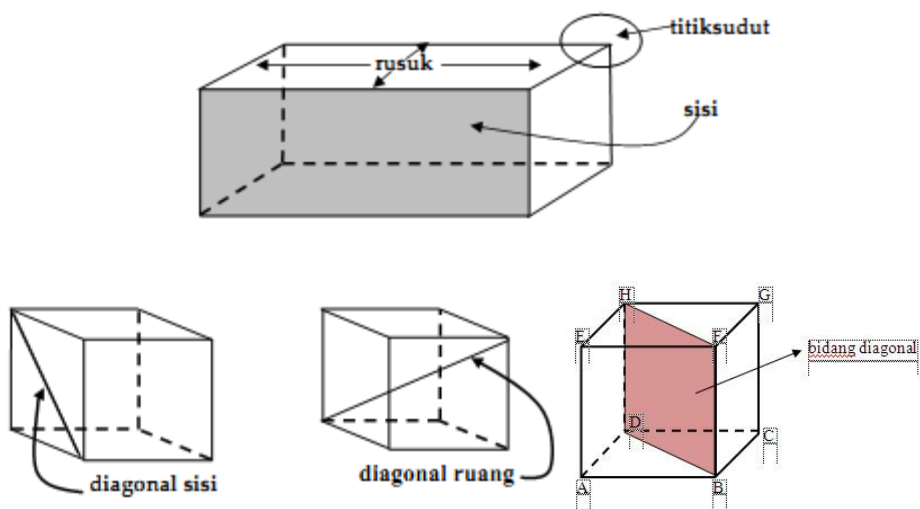
$$EF = \frac{28 + 72}{10}$$

$$EF = 10$$

Jadi, panjang EF adalah 10 *cm*.

e. Bangun Ruang

Bangun ruang merupakan bentuk geometri berdimensi tiga. Bangun ruang adalah bagian ruang yang dibatasi oleh himpunan titik-titik yang terdapat pada seluruh permukaan bangun tersebut. Permukaan yang dimaksud pada definisi tersebut atau permukaan yang membatasi bangun ruang adalah bidang atau sisi. Perpotongan dari dua buah sisi adalah rusuk. Perpotongan tiga buah rusuk atau lebih adalah titik sudut. Bidang atau sisi, rusuk, dan titik sudut merupakan contoh dari unsur-unsur bangun ruang.



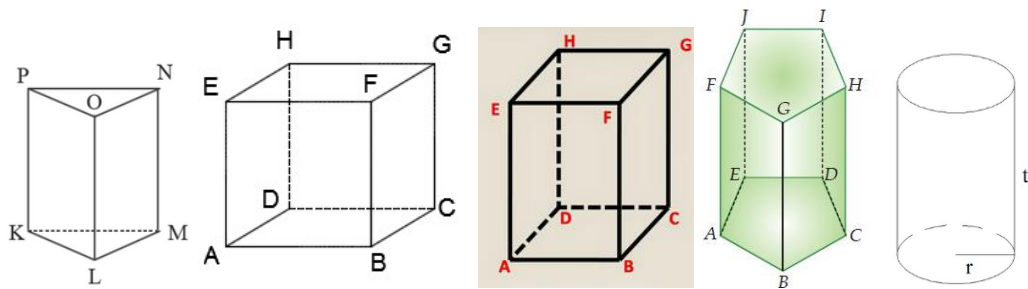
Gambar 2.58 Unsur – Unsur Bangun Ruang

Selain bidang atau sisi, rusuk, dan titik sudut, unsur bangun ruang yang lain adalah diagonal sisi atau diagonal bidang, diagonal ruang, dan bidang diagonal. Diagonal sisi atau diagonal bidang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang berhadapan pada sebuah sisi. Diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan pada sebuah ruang. Bidang diagonal adalah bidang yang dihubungkan oleh dua buah diagonal sisi yang sejajar.

1) Prisma

Prisma adalah bangun ruang yang dibentuk oleh dua daerah *polygon* kongruen yang terletak pada bidang sejajar, dan tiga atau lebih daerah persegi panjang yang ditentukan oleh sisi-sisi dua daerah *polygon* tersebut sedemikian hingga membentuk permukaan tertutup sederhana. Dua daerah *polygon* kongruen yang

terletak pada bidang sejajar dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain-lain. Dengan kata lain, prisma merupakan sebuah bangun ruang yang dibatasi oleh dua buah bangun datar yang kongruen sebagai alas dan tutup dan beberapa buah persegi panjang.



Gambar 2.59 Macam-Macam Prisma

Penamaan sebuah prisma, umumnya mengikuti bentuk alasnya. Alas prisma dan tutup prisma kongruen. Sebuah prisma yang memiliki dua buah segitiga yang kongruen (alas dan tutup) dinamakan prisma segitiga. Sebuah prisma yang memiliki dua buah segiempat yang kongruen dinamakan prisma segiempat. Sebuah prisma yang memiliki tiga pasang sisi yang kongruen (berbentuk persegi panjang) dinamakan balok. Sebuah prisma yang semua sisinya kongruen dinamakan kubus. Sebuah prisma yang alas dan tutupnya berbentuk segi- n dengan n tak hingga atau yang disebut lingkaran dinamakan tabung.

Pada bangun ruang sisi datar, terdapat hubungan antara banyaknya sisi, banyaknya titik sudut dan banyaknya rusuk. Hubungan tersebut dinamakan Kaidah Euler. Kaidah Euler menyatakan bahwa:

“banyaknya sisi ditambah dengan banyaknya titik sudut adalah sama dengan banyaknya rusuk ditambah dengan dua atau $S + T = R + 2$ ”.

Perhatikan Tabel Kaidah Euler berikut ini:

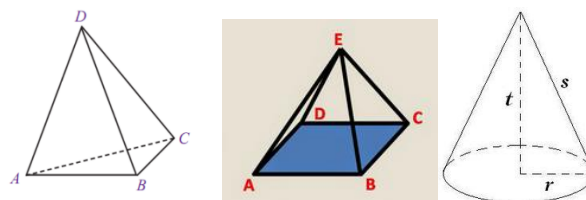
Tabel 2.4. Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Prisma

Nama Bangun Ruang	Banyak Sisi	Banyak Titik Sudut	Banyak Rusuk
Kubus	6	...	12
Balok	...	8	...
Prisma segitiga	5	6	...
Prisma segiempat	...	8	12
Prisma segilima	7	...	...
Prisma segi n	$n + 2$	$2n$	$3n$
Tabung	Tak berhingga	Tak berhingga	Tak berhingga

Cobalah Anda tentukan banyak sisi, titik sudut, dan rusuk yang lainnya.

2) Limas

Limas merupakan sebuah bangun ruang yang memiliki alas segi- n dan sisi selimut berbentuk segitiga yang bertemu pada satu titik puncak. Limas adalah bidang banyak yang ditentukan oleh daerah polygon (yang disebut alas), suatu titik yang tidak terletak pada bidang polygon dan segitiga-segitiga yang ditentukan oleh titik tersebut dan sisi-sisi dari polygon.



Gambar 2.60 Macam – Macam Limas

Alas-alas dari suatu limas dapat berupa segitiga, segiempat, segilima, dan lain lain. Penamaan limas bergantung pada jenis alasnya. Sebuah limas yang alasnya berbentuk lingkaran disebut kerucut.

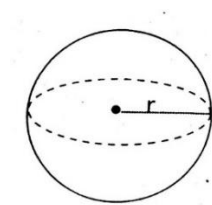
Tabel 2.5. Hubungan Banyaknya Sisi, Titik Sudut, dan Rusuk pada Limas

Nama Bangun Ruang	Banyak Sisi	Banyak Titik Sudut	Banyak Rusuk
Limas segitiga	4	...	6
Limas segiempat	...	5	...
Limas segilima	6	...	...
Limas segi n	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
Kerucut	Tak berhingga	Tak berhingga	Tak berhingga

Cobalah Anda lengkapi Tabel 2.5 tersebut!

3) Bola

Bola merupakan salah satu bangun geometri. Bola merupakan bangun ruang tiga dimensi yang dibentuk oleh tak hingga lingkaran berjari-jari sama panjang dan berpusat pada satu titik yang sama.



Gambar 2.61 Bola

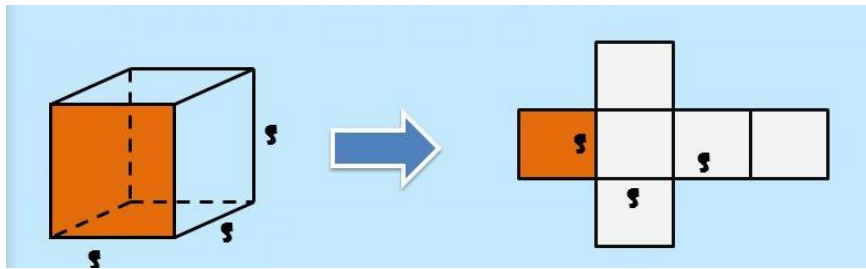
f. Luas Permukaan dan Volume Bangun Ruang

1) Luas Permukaan

Luas permukaan bangun ruang adalah jumlah luas seluruh permukaan (bidang) pembentuk bangun ruang tersebut. Untuk memudahkan proses mencari rumus luas bangun ruang, maka sebelumnya kita harus memahami jaring-jaring bangun ruang tersebut. Jaring-jaring merupakan rangkaian sisi atau bidang dari sebuah bangun ruang. Pada bagian selanjutnya akan diuraikan luas permukaan dari setiap bangun ruang.

a) Luas Permukaan Kubus

Luas permukaan kubus adalah jumlah luas seluruh permukaan kubus. Seperti kita ketahui, kubus terbentuk dari 6 buah persegi yang kongruen.



Gambar 2.62 Jaring-Jaring Kubus

Perhatikan gambar jaring-jaring tersebut. *Cobalah Anda temukan jaring-jaring kubus yang lain!*

Misalkan diketahui panjang rusuk kubus adalah s (atau panjang sisi persegi $= s$).

$$\text{Luas permukaan kubus} = 6 \times \text{luas persegi}$$

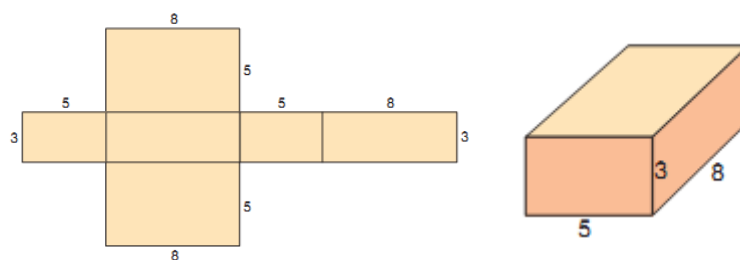
$$\text{Luas permukaan kubus} = 6 \times s \times s$$

$$\text{Luas permukaan kubus} = 6 \times s^2$$

b) Luas Permukaan Balok

Luas permukaan balok adalah jumlah luas permukaan sisi-sisi balok. Seperti diketahui, bahwa balok terdiri dari 3 pasang sisi berbentuk persegi panjang yang kongruen.

Perhatikan gambar-gambar berikut ini:

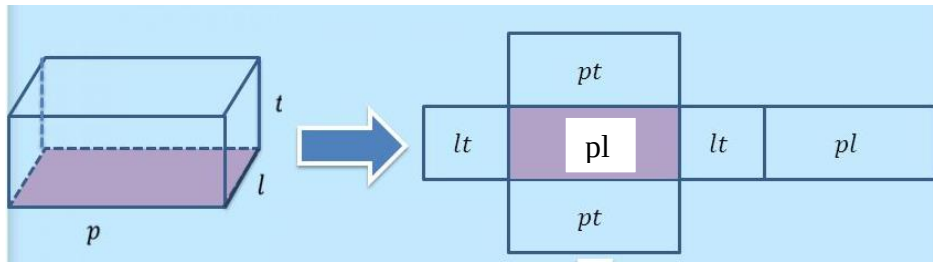


Gambar 2.63 Jaring-Jaring Balok

Berdasarkan gambar tersebut, luas permukaan balok di atas adalah:

$$2 \times (8 \times 5) + 2 \times (5 \times 3) + 2 (8 \times 3)$$

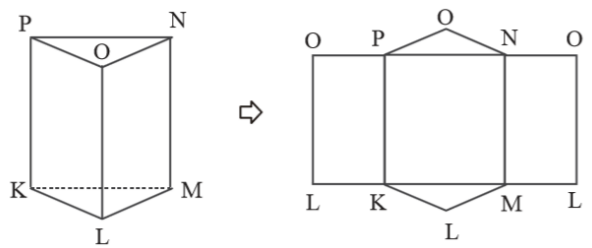
Selanjutnya, perhatikan gambar jaring-jaring berikut ini (*cobalah Anda temukan bentuk jaring-jaring balok yang lainnya!*):



$$\text{Luas permukaan balok} = 2pl + 2pt + 2lt$$

c) Luas Permukaan Prisma

Luas permukaan prisma adalah jumlah luas permukaan dari prisma. Luas permukaan prisma bergantung pada sisi alasnya. Pada dasarnya, jaring-jaring prisma akan terdiri dari sisi alas dan sisi atas, serta beberapa persegi panjang (bergantung dengan bentuk alasnya). Perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.64 Jaring-Jaring Prisma Segitiga

Pada gambar tersebut sisi alas dan sisi atas kongruen, artinya memiliki luas yang sama atau luas daerah alas = luas daerah atas. Sisi selimut prisma berbentuk persegi panjang. Panjang KP = tinggi prisma.

Luas permukaan prisma = luas daerah alas + luas daerah atas + luas daerah selimut,

$$= (2 \times \text{luas daerah alas}) + \text{luas daerah persegi panjang}$$

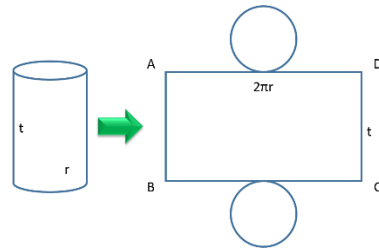
$$= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{panjang} \times \text{lebar})$$

$$= (2 \times \text{luas daerah alas}) + ((KL + LM + MK) \times KP)$$

$$\text{Luas Permukaan Prisma} = (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{keliling alas} \times \text{tinggi})$$

d) Luas Permukaan Tabung

Luas permukaan tabung adalah jumlah luas permukaan dari tabung. Jaringan-jaring tabung akan terdiri dari dua buah lingkaran dan satu persegi panjang. Perhatikan gambar tabung dan jaring-jaringnya berikut ini!



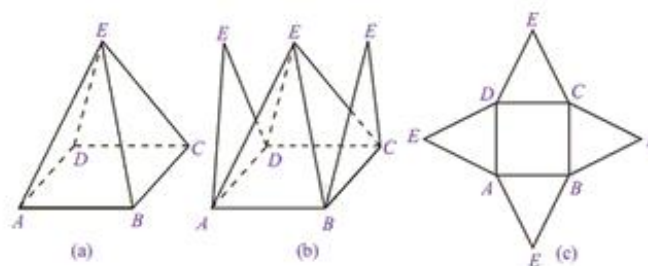
Gambar 2.65 Jaring-Jaring Tabung

Pada gambar jaring-jaring tersebut, selimut tabung berbentuk persegi panjang, dengan panjangnya sama dengan keliling lingkaran dan lebar sama dengan tinggi tabung.

$$\begin{aligned}
 \text{Luas permukaan tabung} &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{luas selimut tabung}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{luas daerah persegi panjang}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah alas}) + (\text{panjang} \times \text{lebar}) \\
 &= (2 \times \text{luas daerah lingkaran}) + (\text{keliling lingkaran} \times t) \\
 &= 2\pi r^2 + 2\pi r t
 \end{aligned}$$

e) Luas Permukaan Limas

Luas permukaan limas adalah jumlah luas permukaan dari limas. Jaringan-jaring limas terdiri dari sisi alas dan beberapa segitiga bergantung dengan bentuk alasnya. Perhatikan gambar limas dan jaring-jaringnya berikut ini:



Gambar 2.66 Jaring-Jaring Limas

Luas permukaan limas ABCD

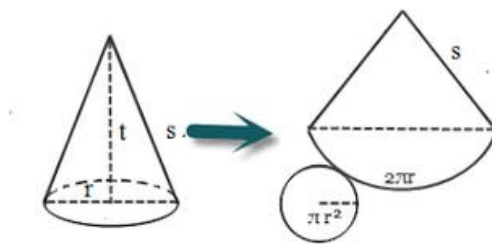
= Luas daerah ABCD + (Luas daerah ABE + Luas daerah BCE + Luas daerah CDE + Luas daerah ADE)

= Luas daerah alas + jumlah daerah luas sisi tegak

Jadi *Luas Permukaan Limas = Luas Daerah Alas + Jumlah Daerah Luas Sisi Tegak*

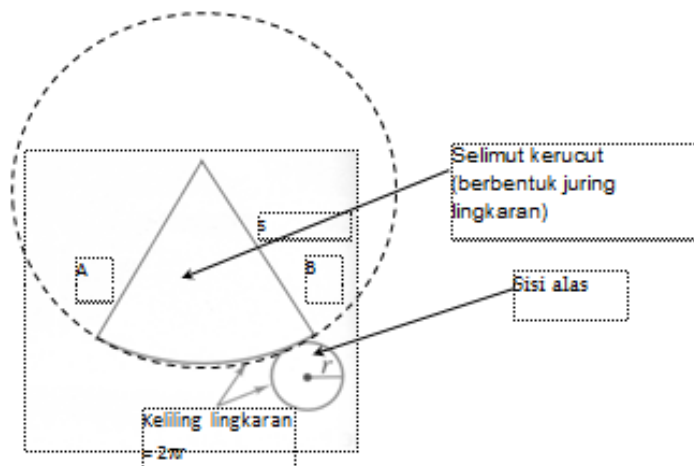
f) Luas Permukaan Kerucut

Luas permukaan kerucut adalah jumlah luas permukaan dari kerucut. Jarum-jaring kerucut terdiri dari satu buah lingkaran dan satu juring lingkaran (dari lingkaran yang berbeda). Perhatikan gambar kerucut dan jaring-jaringnya berikut ini:



Gambar 2.57 Jaring-Jaring Kerucut

Untuk menentukan luas selimut sebuah kerucut perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.58 Ilustrasi Luas Selimut Kerucut

Perhatikan juring lingkaran sebagai selimut kerucut, diperoleh perbandingan (antara juring dan lingkaran besar) sebagai berikut:

$$\frac{\text{luas juring}}{\text{luas lingkaran}} = \frac{\text{panjang busur}}{\text{keliling lingkaran}}$$

$$\frac{\text{luas selimut kerucut}}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$\text{Luas selimut kerucut} = \frac{2\pi r}{2\pi s} \pi s^2$$

$$\text{Luas selimut kerucut} = \pi r s$$

Perhatikan lingkaran besar dengan jari-jari s , maka luas lingkarannya adalah πs^2 dan keliling lingkarannya adalah $2\pi s$. Panjang busur akan sama dengan keliling lingkaran kecil dengan jari-jari r yaitu $2\pi r$.

Luas permukaan kerucut = luas lingkaran + luas selimut

$$= \pi r^2 + \pi r s$$

$$= \pi r(r + s)$$

$$\text{Luas permukaan kerucut} = \pi r(r + s)$$

g) Luas Permukaan Bola

Mengajarkan proses menemukan luas permukaan bola pada siswa kita tentunya tidak dapat menggunakan cara seperti sebelumnya. Untuk membantu siswa menemukan rumus luas permukaan bola, maka kita dan siswa dapat mencoba cara sebagai berikut:

1. Siapkan benda yang berbentuk bola, misalnya bola plastik atau jeruk, dalam contoh ini akan menggunakan jeruk.
2. Potong jeruk menjadi 2 bagian yang sama besar.
3. Gambar lingkaran yang diameternya sama dengan diameter belahan jeruk (boleh menjiplaknya). Siswa kita minta untuk menggambar lebih dari 1 lingkaran.



4. Kupas kulit jeruk dari belahan jeruk yang berbentuk setengah bola dan potonglah kecil-kecil.



5. Tempelkan semua potongan kulit jeruk pada lingkaran yang telah digambar oleh siswa (diameter lingkaran sama dengan diameter belahan jeruk)

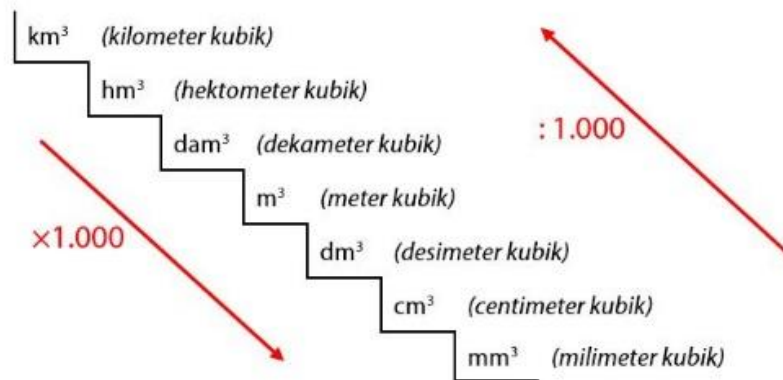


6. Dari percobaan tersebut, potongan kulit jeruk akan memenuhi 4 lingkaran.
7. Diperoleh, luas permukaan bola = 4 x luas daerah lingkaran

$$= 4\pi r^2$$

2) Pengukuran volume

Sebelum membahas mengenai volume bangun ruang, maka kita akan mengingat kembali tentang pengukuran volume. Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur volume adalah $km^3, hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3, mm^3$. Perhatikan bagan di bawah ini:



Bagan 2.4 Konversi Satuan Volume

Mengkonversi satuan volume dapat dilakukan dengan aturan: setiap turun 1 satuan ukuran volume maka dikalikan 1.000, dan setiap naik 1 satuan ukuran volume maka dibagi 1.000.

Selain satuan baku yang telah disebutkan, satuan baku lain untuk mengukur volume antara lain liter. *1liter* merupakan sebuah ukuran isi dari kubus yang memiliki panjang rusuk *1desimeter* atau $1liter = 1dm^3$.

Coba Anda buat tangga konversi satuan volume (liter), dan carilah hubungan antara milliliter dan cm^3 !

Setelah menguasai pengukuran volume, siswa juga diharapkan dapat menguasai hukum kekekalan volume. Siswa yang sudah menguasai hukum kekekalan volume akan memahami bahwa jika air pada sebuah gelas terisi penuh dan dimasukkan sebuah benda, maka volume air yang tumpah sama dengan volume benda yang dimasukkan ke dalam gelas.

3) Volume Bangun Ruang

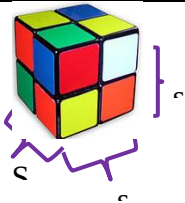
Hakikat volume adalah isi yang memenuhi sebuah bangun ruang berongga.

a) Volume Kubus

Volume Kubus adalah isi yang memenuhi bangun ruang kubus. Untuk membantu siswa menemukan rumus volume kubus, kita dapat menggunakan langkah seperti berikut ini:

1. Siapkan benda yang berbentuk kubus atau boleh kita menggunakan rubik.
2. Siapkan kubus satuan dengan ukuran satu satuan volume.
3. Ukur panjang rusuk kubus.
4. Isi benda yang berbentuk kubus dengan kubus satuan tersebut.
5. Hitung banyak kubus satuan yang mengisi benda berbentuk kubus secara penuh.
6. Cari hubungan antara panjang rusuk kubus dengan banyak kubus satuan yang mengisi kubus tersebut.

Tabel 2.4 Volume Balok

Bentuk Bangun	Panjang rusuk	Banyak kubus satuan	Hubungan (panjang rusuk dan banyak kotak)
	2	8	$2 \times 2 \times 2 = 8$
	3	27	$3 \times 3 \times 3 = 27$
	4	64	$4 \times 4 \times 4 = 64$
	s		$s \times s \times s$

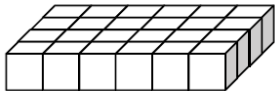
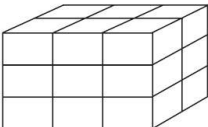
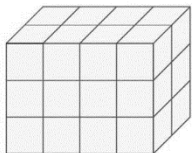
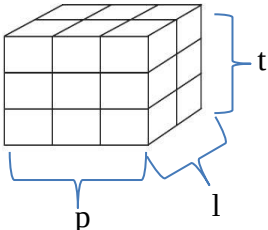
Dapat disimpulkan **volume kubus** = $s \times s \times s$, dimana s = panjang rusuk kubus.

b) Volume Balok

Volume balok adalah isi yang memenuhi bangun ruang balok. Untuk memudahkan dalam membantu siswa menemukan volume balok, kita dapat menggunakan langkah sebagai berikut:

1. Siapkan benda-benda berbentuk balok dan beberapa kubus satuan.
2. Ukur panjang sisi (panjang, lebar, dan tinggi) balok.
3. Isi benda yang berbentuk balok dengan menggunakan kubus satuan.
4. Hitung banyak kubus satuan yang mengisi balok tersebut sampai penuh.
5. Cari hubungan antara panjang, lebar, dan tinggi balok dengan banyak kubus satuan yang mengisi balok tersebut.

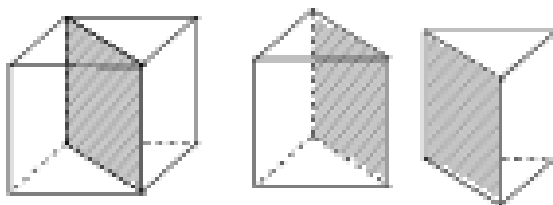
Tabel 2.5 Volume Balok

Bentuk Bangun	Panjang (p)	Lebar (l)	Tinggi (t)	Banyak kubus satuan	Hubungan p, l, t, dan kubus satuan
	6	4	1	24	$6 \times 4 \times 1 = 24$
	3	2	3	18	$3 \times 2 \times 3 = 18$
	4	2	3	24	$4 \times 2 \times 3 = 24$
	p	l	t		$P \times l \times t$

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan volume balok adalah: *Volume balok* = **panjang** × **lebar** × **tinggi**.

c) Volume Prisma

Volume prisma adalah isi yang memenuhi bangun ruang prisma tersebut. Untuk menentukan volume prisma, perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 2.59 Ilustrasi Volume Prisma

Perhatikan volume prisma tegak segitiga tersebut. Prisma segitiga tersebut diperoleh dari membelah sebuah balok dan membaginya pada salah satu bidang diagonalnya, sehingga

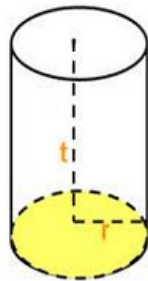
$$\begin{aligned}
 \text{Volume prisma tegak segitiga} &= \frac{1}{2} \text{Volume balok} \\
 &= \frac{1}{2}(pl)t \\
 &= \left(\frac{1}{2}pl\right)t \\
 &= \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi}
 \end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan

$$\text{Volume prisma} = \text{Luas daerah alas} \times \text{tinggi}.$$

d) Volume Tabung

Volume tabung adalah isi yang memenuhi bangun ruang tabung tersebut. Setelah kita menemukan volume prisma, maka kita akan dapat menentukan rumus volume tabung.



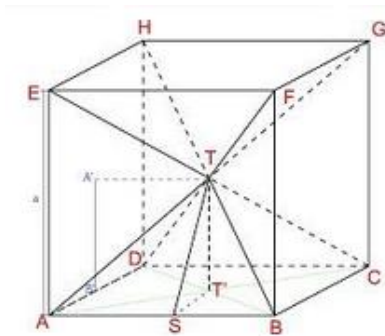
Karena Volume prisma = luas daerah alas $\times$ tinggi, dimana alas tabung berbentuk lingkaran, maka:

$$\begin{aligned}
 \text{Volume prisma} &= \text{luas daerah alas} \times \text{tinggi} \\
 &= \pi r^2 t
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, volume tabung} = \pi r^2 t$$

e) Volume Limas

Volume limas adalah isi yang memenuhi bangun ruang limas tersebut. Untuk menemukan rumus volume limas, perhatikan gambar prisma berikut ini!



Gambar 2.60 Limas

Jika dicermati pada prisma ABCD.EFGH (semua sisi prisma kongruen) tersebut terdapat 6 limas segiempat yang kongruen (limas T.ABCD, T.EFGH, T.BCGF, T.ADHE, T.DCGH, T.ABFE,) dengan alas limas kongruen dengan alas prisma dan tinggi limas $= \frac{1}{2}$ tinggi prisma atau tinggi prisma = 2 tinggi limas.

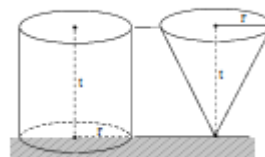
Jadi,

$$\begin{aligned}
 \text{Volume prisma} &= 6 \times \text{volume limas} \\
 \text{Volume limas} &= \frac{1}{6} \text{ volume prisma} \\
 &= \frac{1}{6} \text{ luas daerah alas} \times \text{tinggi prisma} \\
 &= \frac{1}{6} \text{ luas daerah alas} \times 2 \times \text{tinggi limas} \\
 &= \frac{1}{3} \text{ luas daerah alas} \times \text{tinggi}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, Volume limas} = \frac{1}{3} \text{ luas daerah alas} \times \text{tinggi}$$

f) Volume Kerucut

Volume kerucut adalah isi yang memenuhi bangun ruang kerucut tersebut. Perhatikan gambar tabung dan kerucut berikut ini:



Gambar 2.61 Ilustrasi Volume Kerucut Berdasarkan Volume Tabung

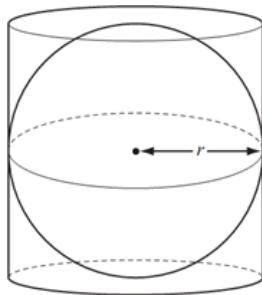
Untuk menentukan volume kerucut, siswa dapat melakukan praktik melalui kegiatan berikut ini:

Siapkan sebuah tabung dan kerucut yang memiliki alas dan tinggi yang sama. Siswa diminta untuk menakar air, beras, ataupun pasir. Berdasarkan hal tersebut diperoleh hasil bahwa untuk memenuhi volume tabung tersebut dibutuhkan 3 kali volume kerucut yang memiliki alas dan tinggi yang sama. Siswa dapat menyimpulkan:

$$\begin{aligned}\text{Volume kerucut} &= \frac{1}{3} \text{Luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 t\end{aligned}$$

g) Volume Bola

Volume bola adalah isi yang memenuhi bangun ruang bola tersebut. Untuk membantu siswa menemukan rumus volume bola, kita dapat mengaitkannya dengan volume tabung. Perhatikan gambar berikut ini, pada gambar tersebut, terdapat bola yang berjari-jari r , serta tabung yang berjari-jari r dan tinggi tabung = $2r$. Jika kita melakukan percobaan sederhana, percobaan menakar benda atau air, maka hasil menakar akan menunjukkan bahwa volume tabung sama dengan 3 kali volume setengah bola.



$$\text{Volume tabung} = 3 \times \text{volume setengah bola}$$

$$\text{Volume setengah bola} = \frac{1}{3} \text{volume tabung}$$

$$\text{Volume bola} = \frac{2}{3} \text{volume tabung}$$

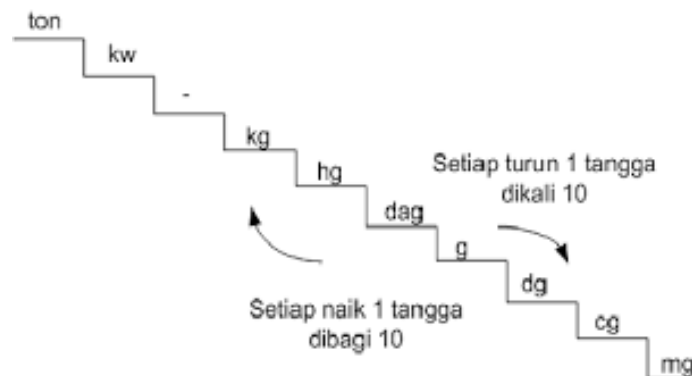
$$\text{Volume bola} = \frac{2}{3} \pi r^2 t$$

$$\text{Volume bola} = \frac{2}{3} \pi r^2 (2r)$$

$$Volume\ bola = \frac{4}{3}\pi r^3$$

4) Pengukuran Berat

Satuan baku yang dapat digunakan untuk mengukur berat adalah *kg, hg, dag, gram, dg, cg, mg*. Perhatikan bagan di bawah ini:



Bagan 2.5 Konversi Satuan Berat

Berdasarkan bagan tersebut, terdapat satuan baku yang lain untuk mengukur berat, yaitu: $1\ ton = 10\ kw$, $1\ ton = 1000\ kg$, dan $1\ kw = 100\ kg$. Selain itu terdapat ukuran baku yang lain yaitu *ons*, dimana $1\ ons = 1\ hg$.

Setelah menguasai pengukuran berat, siswa diharapkan dapat memahami hukum kekekalan berat. Siswa yang telah memahami hukum kekekalan berat akan menyatakan bahwa berat suatu benda akan tetap meskipun bentuknya berubah, dan ditimbang dengan alat yang berbeda.

g. Debit

1) Pengukuran waktu

Sebelum membahas tentang debit, maka akan dimulai terlebih dahulu mempelajari pengukuran waktu. Satuan baku untuk mengukur waktu adalah detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, semester, tahun, lustrum, windu, dasawarsa, dan abad.

Coba Anda cari hubungan antar satuan waktu tersebut!

2) Debit

Permasalahan dalam kajian volume tidak hanya sekedar menghitung berapa volume dari sebuah bangun ruang tetapi berhubungan juga dengan debit. Debit digunakan untuk mengukur volume zat cair yang mengalir untuk setiap satuan waktu. Satuan yang biasa digunakan adalah volume persatuan waktu (m^3/detik , m^3/jam , liter/menit, liter/detik ataupun liter/jam). Mengajarkan konsep debit di Sekolah Dasar, dapat dimulai dengan memberikan ilustrasi, seorang siswa akan mengisi air minum pada botol minuman yang berkapasitas 1 liter, waktu yang dibutuhkan untuk mengisi air minum dari gallon air mineral ke botol minuman adalah 1,5 menit, siswa berdiskusi dengan guru sampai mendapatkan kesimpulan bahwa ukuran mengisi air atau volume air tiap satu satuan waktu dinamakan debit.

$$\text{debit} = \frac{\text{volume}}{\text{waktu}}$$

Contoh:

1. Sebuah drum dengan jari-jari 60 cm dan tinggi 1 m ingin diisi dengan air hingga penuh. Jika waktu yang dibutuhkan untuk mengisi drum tersebut adalah 50 menit, berapakah debit airnya?

Sebelum menentukan debit, tentukanlah dahulu volume drum.

$$\begin{aligned}\text{Volume drum} &= \pi r^2 t \\ &= 3,14 \times (0,6\text{m})^2 \times 1\text{m} \\ &= 1,884 \text{ m}^3 \\ &= 1884 \text{ liter}\end{aligned}$$

$$\text{debit} = \frac{\text{volume}}{\text{waktu}}$$

$$\text{debit} = \frac{1884 \text{ liter}}{50 \text{ menit}}$$

$$\text{debit} = 37,68 \text{ liter/menit}$$

2. Sebuah kolam renang memiliki kedalaman di tempat yang dangkal adalah 1 m dan kedalaman kolam di tempat yang paling dalam adalah 2,5 m. Jarak antara dinding kolam bagian dangkal dan dalam adalah 10 m, dan jarak antara dinding yang kongruen adalah 3 m. Pada pukul 07.25 kolam tersebut diisi air

menggunakan pompa dengan debit 125 liter/menit, dan pada pukul 09.00 pompa tersebut sempat mati selama 45 menit. Pada pukul berapa kolam renang tersebut penuh terisi air?

Berdasarkan permasalahan tersebut, kolam renang tersebut berbentuk prisma dengan alas trapesium (**Mengapa? Coba gambarkan!**)

$$\begin{aligned}\text{Volume prisma} &= \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= [(1 + 2,5 \text{ m})/2 \times 10 \text{ m}] \times 3 \text{ m} \\ &= 52,5 \text{ m}^3 \\ &= 52.500 \text{ liter}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Waktu} &= \frac{\text{volume}}{\text{debit}} \\ &= \frac{52.500 \text{ liter}}{125 \text{ liter/menit}} \\ &= 420 \text{ menit}\end{aligned}$$

Mulai diisi pukul 07.25 dan pada pukul 09.00 terhenti selama 45 menit jadi akan penuh pada pukul 15.05 (**Mengapa?**)

h. Jarak, Waktu, dan Kecepatan

Konsep kecepatan tentu sangat berhubungan dengan kegiatan sehari-hari. Seperti telah diketahui, kecepatan juga berkaitan dengan jarak dan waktu tempuh. Tentu kita masih ingat akan rumus kecepatan.

$$\text{Kecepatan} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Waktu}}$$

$$\text{Jarak} = \text{Waktu} \times \text{Kecepatan}$$

$$\text{Waktu} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Kecepatan}}$$

Pada bagian ini akan dipaparkan mengenai waktu berpapasan dan waktu menyusul. Saat dua orang melakukan sebuah perjalanan dari arah yang berlawanan, dan melalui jarak yang sama (dengan asumsi kecepatannya adalah konstan), maka di suatu titik tertentu mereka akan berpapasan. Sama halnya ketika ada dua orang berkendara dengan arah yang sama dan melalui jalur yang

sama, maka orang yang satu akan menyusul orang yang terlebih dahulu berangkat dengan kecepatan yang berbeda.

Perhatikan contoh–contoh berikut ini:

Jarak Kota A dan Kota B adalah 275 km. Ahmad berkendara dari Kota A ke Kota B pada pukul 09.30 dengan kecepatan rata-rata 54 km/jam. Boni berkendara dari Kota B ke Kota A dengan kecepatan 56 km/jam. Jika mereka melalui jalan yang sama dan lancar, pada pukul berapakah mereka akan berpapasan?

Pada kasus ini terdapat dua orang yang berkendara berbeda arah tetapi melalui jalan yang sama dan berangkat pada waktu yang sama.

Untuk menentukan waktu mereka berpapasan dapat digunakan rumus:

Waktu Berpapasan
Ketika Jam Berangkat Sama

$$w_p = \frac{\text{Jarak Total}}{K_1 + K_2}$$

Silahkan dicoba dengan rumus tersebut, dan hasil yang akan diperoleh adalah 2 jam 30 menit atau mereka akan berpapasan pada pukul 09.30 + 2 jam 30 menit sama dengan pukul 12.00.

Selanjutnya, perhatikan contoh permasalahan yang lain. Jarak Kota A dan Kota B adalah 180 km. Ahmad berkendara dari kota A ke kota B pada pukul 09.30 dengan kecepatan 80 km/jam. Boni berkendara dari kota B ke kota A pada pukul 10.00 dengan kecepatan 60 km/jam. Jika mereka melalui jalan yang sama dan lancar, pada pukul berapakah mereka akan berpapasan?

Untuk kasus yang kedua, berbeda dengan kasus sebelumnya. Perbedaannya terletak pada waktu keberangkatannya, sehingga akan ada selisih waktu. Selisih waktu berangkatnya adalah 30 menit atau $\frac{1}{2}$ jam.

Kemudian kita akan menentukan saat orang kedua berangkat (dalam hal ini Boni), orang pertama (dalam hal ini Ahmad) telah menempuh jarak berapa km (atau yang kemudian disebut dengan selisih jarak).

Selisih jarak = kecepatan x selisih waktu.

$$= 80 \text{ km/jam} \times \frac{1}{2} \text{ jam}$$

$$= 40 \text{ km}$$

Waktu Berpapasan
Ketika Jam Berangkat Berbeda

$$w_p = \frac{\text{Jarak Total} - \text{Selisih Jarak}}{K_1 + K_2}$$

Waktu berpapasan adalah:

$$\begin{aligned} \text{Waktu berpapasan} &= \frac{180 \text{ km} - 40 \text{ km}}{80 \text{ km/jam} + 60 \text{ km/jam}} \\ &= \frac{140 \text{ km}}{140 \text{ km/jam}} \\ &= 1 \text{ jam} \end{aligned}$$

Jadi mereka berpapasan pada pukul 11.00.

Contoh yang ketiga, berbeda dengan sebelumnya. Perhatikan contoh selanjutnya. Fitria dan Iqbal akan pergi berkendara. Fitria pergi pukul 09.40 dengan kecepatan 60 km/jam. Kemudian Iqbal akan pergi pukul 10.00 dengan kecepatan 70 km/jam. Pada pukul berapakah Iqbal akan menyusul Fitria?

Pada kasus ini, ada 2 orang yang berkendara dengan tujuan yang sama, arah yang sama, dan jalan yang dilalui pun sama. Orang pertama berangkat terlebih dahulu, kemudian disusul orang kedua dengan kecepatan yang lebih cepat, maka dapat diasumsikan bahwa orang kedua akan menyusul orang pertama.

Untuk menentukan kapan orang kedua akan menyusul orang pertama (atau dalam kasus ini Iqbal akan menyusul Fitria) maka yang akan ditentukan terlebih

dahulu adalah jarak saat Iqbal berangkat maka Fitria sudah mencapai jarak berapa km (atau dalam hal ini akan kita sebut sebagai selisih jarak).

Dari permasalahan tersebut diketahui selisih waktunya adalah 20 menit atau $\frac{1}{3}$ jam.

Selisih jarak = kecepatan x selisih waktu

$$= 60 \text{ km/jam} \times \frac{1}{3} \text{ jam}$$

$$= 20 \text{ km.}$$

Waktu Menyusul

$$W_m = \frac{\text{Selisih Jarak}}{K_2 - K_1}$$

Dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \text{Waktu menyusul} &= \frac{\text{selisih jarak}}{\text{kecepatan 2} - \text{kecepatan 1}} \\
 &= \frac{20 \text{ km}}{70 \text{ km/jam} - 60 \text{ km/jam}} \\
 &= \frac{20 \text{ km}}{10 \text{ km/jam}} \\
 &= 2 \text{ jam}
 \end{aligned}$$

Karena Iqbal berangkat pukul 10.00, maka Iqbal akan menyusul Fitria pada pukul 10.00 + 2 jam atau pukul 12.00.

4. Tugas Terstruktur

Setelah anda membaca dan memahami uraian materi dan contoh di atas, coba Anda selesaikan tugas terstruktur berikut ini:

Salah satu materi bangun ruang adalah jaring-jaring bangun ruang. Coba Anda rancang berbagai macam jaring-jaring bangun ruang (kubus, balok, prisma, limas, kerucut, dan tabung) kemudian coba Anda justifikasi apakah

*benar jaring-jaring yang Anda buat dapat membentuk sebuah bangun ruang?
Menurut Anda adakah syarat untuk membuat sebuah bangun ruang?*

5. Forum Diskusi

Untuk menambah penguasaan materi Anda, silahkan selesaikan forum diskusi mengenai materi geometri dan pengukuran berikut ini:

Terdapat permasalahan seperti berikut ini: “Jarak rumah Ani dan Budi adalah 3 km, dan jarak rumah Budi dan Caca adalah 4 km”. Menurut Anda, berapakah jarak rumah Ani dan Caca? Temukanlah 3 jawaban yang mungkin disertai dengan ilustrasi denahnya!

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Dasar–Dasar Geometri dan Pengukuran

- 1) Pada geometri dan pengukuran, terdapat beberapa istilah, yaitu: 1) unsur yang tidak didefinisikan, 2) unsur yang didefinisikan, 3) aksioma/postulat, 4) teorema/dalil/rumus.
- 2) Unsur yang tidak didefinisikan merupakan konsep yang mudah dipahami dan sulit dibuatkan definisinya, contoh titik, garis.
- 3) Unsur yang didefinisikan merupakan konsep yang dikembangkan dari unsur yang tidak didefinisikan dan merupakan konsep yang memiliki batasan, contoh sinar garis, ruas garis, segitiga.
- 4) Aksioma/postulat merupakan konsep yang disepakati benar tanpa harus dibuktikan kebenarannya, contoh postulat garis sejajar.
- 5) Teorema/dalil/rumus adalah konsep yang harus dibuktikan kebenarannya melalui serangkaian pembuktian deduktif, contoh Teorema Pythagoras.

- 6) Titik merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan. Titik merupakan konsep abstrak yang tidak berwujud atau tidak berbentuk, tidak mempunyai ukuran dan berat. Titik disimbolkan dengan noktah.
- 7) Garis merupakan salah satu unsur yang tidak didefinisikan.
- 8) Sinar garis merupakan bagian dari garis yang memanjang ke satu arah dengan panjang tidak terhingga.
- 9) Ruas garis merupakan bagian dari garis yang dibatasi oleh dua buah titik di ujung dan pangkalnya.
- 10) Dua garis g dan h dikatakan sejajar ($g \parallel h$) jika kedua garis tersebut tidak mempunyai titik sekutu (titik potong).
- 11) Melalui sebuah titik P di luar sebuah garis g , ada tepat satu garis h yang sejajar dengan g .
- 12) Bidang merupakan sebuah gagasan abstrak, sehingga bidang termasuk unsur yang tidak didefinisikan.
- 13) Ruang diartikan sebagai unsur geometri dalam konteks tiga dimensi.
- 14) Sudut merupakan gabungan dari sinar garis yang berhimpit di titik pangkalnya.

b. Segi Banyak

- 1) Kurva adalah bangun geometri yang merupakan kumpulan semua titik yang digambar tanpa mengangkat pensil dari kertas.
- 2) Terdapat dua jenis kurva, yaitu kurva tertutup sederhana dan tidak sederhana serta kurva tidak tertutup sederhana dan tidak sederhana.
- 3) Segitiga adalah poligon yang memiliki tiga sisi.
- 4) Alas dan tinggi segitiga selalu tegak lurus
- 5) Segitiga sebarang, adalah segitiga yang semua sisinya tidak sama panjang.
- 6) Segitiga sama kaki, adalah segitiga yang memiliki dua buah sisi yang sama panjang,
- 7) Segitiga sama sisi, adalah segitiga yang semua sisinya sama panjang.
- 8) Segitiga lancip, adalah segitiga yang ketiga sudutnya merupakan sudut lancip.

- 9) Segitiga siku-siku, adalah segitiga yang salah satu sudutnya siku-siku.
- 10) Segitiga tumpul, adalah segitiga yang salah satu sudutnya tumpul.
- 11) Segiempat adalah poligon yang memiliki empat sisi.
- 12) Trapesium adalah segiempat yang tepat memiliki sepasang sisi sejajar.
- 13) Jajargenjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar, serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- 14) Belah ketupat didefinisikan sebagai segiempat dengan sisi yang berhadapan sejajar, keempat sisinya sama panjang, dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
- 15) Persegi panjang adalah jajargenjang yang besar keempat sudutnya 90° .
- 16) Persegi adalah persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang.
- 17) Layang-layang adalah segiempat yang mempunyai sisi yang berdekatan sama panjang dan kedua diagonalnya saling tegak lurus.
- 18) Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik (pusat lingkaran).

c. Kesebangunan dan Kekongruenan

- 1) Dua atau lebih bangun dikatakan sebangun jika mempunyai syarat:
 - a) Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan yang sama.
 - b) Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.
- 2) Pada bangun segitiga, dua atau lebih segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:
 - a) Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama (sisi – sisi – sisi).
 - b) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar (sudut – sudut – sudut).
- 3) Dua bangun atau lebih dikatakan kongruen jika bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama serta sudut yang bersesuaian sama besar (sama dan sebangun).
- 4) Dua atau lebih segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat sebagai berikut:
 - a) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang (sisi – sisi – sisi)

- b) Dua sisi yang bersesuaian sama panjang dan besar sudut yang diapit sama besar (sisi – sudut – sisi)
 - c) Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang.
- d) Keliling dan Luas Daerah Bangun Datar
 - 1) Pengukuran panjang dapat diukur dengan satuan non baku dan satuan baku. Contoh satuan tidak baku untuk pengukuran panjang antara lain jengkal, hasta, depa dan kaki. Contoh satuan baku untuk mengukur panjang adalah kilometer (km), hektometer (hm), dekameter (dam), meter (m), desimeter (dm), centimeter (cm), dan millimeter (mm).
 - 2) Keliling adalah jumlah keseluruhan panjang sisi yang membatasi suatu bangun.
 - 2) Luas bangun datar adalah luas daerah yang dibatasi oleh sisi-sisi bangun datar tersebut. Contoh satuan baku untuk mengukur luas adalah $km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2, are$ dan *hektar*.
- e) Bangun Ruang
 - 1) Bangun ruang adalah bagian ruang yang dibatasi oleh himpunan titik-titik yang terdapat pada seluruh permukaan bangun.
 - 2) Permukaan bangun ruang berbentuk bangun datar biasa disebut dengan bidang atau sisi.
 - 3) Perpotongan dari dua buah sisi adalah rusuk.
 - 4) Perpotongan tiga buah rusuk atau lebih adalah titik sudut.
 - 5) Diagonal sisi atau diagonal bidang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang berhadapan pada sebuah sisi.
 - 6) Diagonal ruang adalah garis yang menghubungkan dua buah titik sudut yang saling berhadapan pada sebuah ruang.
 - 7) Kaidah Euler menyatakan bahwa banyaknya sisi ditambah dengan banyaknya titik sudut adalah sama dengan banyaknya rusuk ditambah dengan 2.

- f) Luas Permukaan Bangun Ruang dan Volume Bangun Ruang
- 1) Luas permukaan adalah jumlah seluruh sisi-sisi yang membatasi bangun ruang tersebut.
 - 2) Volume adalah isi yang memenuhi bangun ruang berongga. Contoh satuan baku untuk mengukur volume adalah $km^3, hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3, mm^3$ dan $kl, hl, dal, liter, dl, cl, ml$.
 - 3) Contoh satuan baku untuk mengukur berat adalah $ton, kw, kg, hg(ons), dag, gram, dg, cg, mg$.
- g) Debit
- Debit merupakan ukuran untuk mengukur volume zat cair yang mengalir untuk setiap satuan waktu. Satuan waktu yang dapat digunakan adalah detik, menit, dan jam. Satuan debit yang dapat digunakan antara lain $ml/detik, ml/menit, l/detik, l/menit$, dan lain sebagainya.
- h) Jarak, waktu, dan kecepatan
- Kecepatan merupakan jarak yang ditempuh persatu satuan waktu. Satuan yang dapat digunakan antara lain $km/jam, meter/menit, menit/detik$, dan lain sebagainya.

2. Tes Formatif

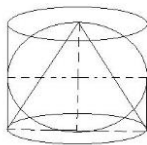
1. Diantara bangun-bangun di bawah ini yang pasti sebangun adalah
 - a. Dua buah belah ketupat
 - b. Dua buah segitiga siku-siku
 - c. Dua buah persegi panjang
 - d. Dua buah persegi
 - e. Dua buah segitiga sama kaki
2. Untuk mengajarkan siswa pada topik volume balok, ditempuh langkah-langkah berikut ini:
 - (1) Merumuskan rumus volume balok.
 - (2) Menanyakan bagaimana cara menentukan banyak kubus satuan.
 - (3) Menanyakan banyak kubus satuan yang diperlukan untuk mengisi kardus berbentuk balok.

- (4) Merumuskan pengertian volume balok.
- (5) Memberi soal tentang volume balok.
- (6) Memberi permasalahan bagaimana menentukan banyak kubus satuan yang akan dimasukkan ke dalam kardus berbentuk balok.

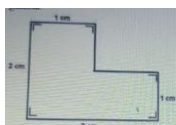
Ibu Anis ingin siswanya belajar volume balok dengan pendekatan konstruktivisme, urutan langkah pembelajaran yang dilakukan Ibu Anis adalah

- a. (4), (1), (5), (6), (2), dan (3)
 - b. (2), (3), (4), (1), (6), dan (5)
 - c. (2), (3), (1), (4), (6), dan (5)
 - d. (2), (3), (1), (4), (5), dan (6)
 - e. (6), (2), (3), (1), (4), dan (5)
3. Segitiga ABC sama sisi dengan luas 346 cm^2 , D titik tengah AC, E titik tengah AD, F titik tengah AB. Luas segitiga DEF adalah cm^2 .
- a. 173
 - b. 86,5
 - c. 81,5
 - d. 43,25
 - e. 40,75
4. Sebuah mobil melaju dengan kecepatan 30 km/jam untuk jarak waktu $a \text{ km}$ dan kemudian dilanjutkan pada jarak $2a \text{ km}$ berikutnya melaju dengan kecepatan 40 km/jam . Rata-rata kecepatan mobil tersebut adalah... km/jam .
- a. 33,33
 - b. 35,00
 - c. 36,00
 - d. 36,67
 - e. 38,00
5. Anton dan Beni berangkat dari kota A menuju kota B mengendarai mobil dengan kecepatan berturut-turut 60 km/jam dan 40 km/jam . Beni berangkat terlebih dahulu, selang 2 jam kemudian Anton baru berangkat. Beni akan tersusul oleh Anton setelah Beni berkendara selama ... jam .

- a. 6
 - b. 5
 - c. 4
 - d. 3
 - e. 2
6. Pompa A mampu memompa air dengan debit 80 *liter/menit* dan pompa B dengan 100 *liter/menit*. Kedua pompa tersebut digunakan secara bersama-sama untuk menguras air sebanyak 72.000 *liter*. Setelah lima jam pertama pemakaian ternyata pompa A rusak sedangkan pompa B tetap bisa digunakan hingga selesai. Lama waktu untuk menguras seluruh isi kolam tersebut adalah ... *jam*.
- a. 5
 - b. 6
 - c. 7
 - d. 8
 - e. 9
7. Perhatikan gambar berikut ini. Perbandingan volume kerucut : volume bola : volume tabung adalah



- a. 1 : 1 : 3
 - b. 1 : 2 : 3
 - c. 1 : 3 : 2
 - d. 1 : 4 : 3
 - e. 1 : 5 : 3
8. Seorang anak akan membentuk persegi dari beberapa puzzle yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama.



Puzzle yang dibutuhkan anak tersebut adalah

- a. 6
 - b. 8
 - c. 12
 - d. 20
 - e. 36
9. Diantara beberapa bentuk berikut ini, manakah yang memiliki luas permukaan terbesar?
- a. Kubus dengan panjang rusuk 5 cm
 - b. Balok dengan ukuran panjang 5cm, lebar 4cm, dan tinggi 8cm
 - c. Prisma dengan alas segi empat, dengan ukuran alas 5cm x 5cm, dan tinggi 7 cm
 - d. Tabung dengan jari-jari alas 3,5cm dan tinggi 6cm
 - e. Prisma dengan alas segi empat dengan ukuran panjang 6cm, lebar 3cm, dan tinggi 9cm
- 10.



Berapakah luas daerah yang bertuliskan angka 70 apabila jari jari lingkaran besar adalah 7 cm dan jari-jari lingkaran tengah adalah 3,5 cm?

- a. 3,2
- b. 9,6
- c. 12,8
- d. 16
- e. 38,5

DAFTAR PUSTAKA

- Bennet, A., Burton, L., Nelson, L. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Mc Graw Hill.
- Fitriani, A. D. (2009). *Geometri (Modul PPG)*. Tidak diterbitkan.
- Musser, G., Burger, W., Peterson, B. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*. New York: John Willey & Sons.
- Prabawanto, S, Tiurlina, Nuraeni, E. (2008). *Pendidikan Matematika II*. Bandung: UPI Press.
- Russeffendi. (2006). *Pengantar kepada Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Sobel, Max., Maletsky, Evan . (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, And Strategies*. London: Pearson-Viacom Company.
- Thomas, David. (2001). *Modern Geometry*. Montana: Pasific Grove Brooks/Cole.
- Walle, John. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Virginia: Pearson Prentice Hall.
- Windayana, H., Haki, O., Supriadi. (2008). *Geometri dan Pengukuran*. Bandung: UPI Press.



DAR2/Profesional/027/2/2022

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

MODUL 2

KEGIATAN BELAJAR 3

STATISTIKA DAN PELUANG

Nama Penulis:

Andhin Dyas Fitriani, M.Pd

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISTEK DAN
TEKNOLOGI**

2022

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Kegiatan belajar matematika disusun dengan tujuan untuk memberikan pengetahuan dan wawasan Saudara terkait materi statistika dan peluang. Kegiatan belajar ini menyajikan bahasan mengenai konsep bilangan. Secara rinci kegiatan belajar terdiri dari 5 topik, yaitu menyajikan tentang:

- a. Dasar–dasar statistika (statistik, statistika, dan data).
- b. Penyajian data (dalam bentuk tabel dan diagram).
- c. Distribusi frekuensi.
- d. Ukuran pemusatan data (*mean*, median, dan modus).
- e. Ukuran penyebaran data (*range*, kuartil, simpangan baku dan variansi).
- f. Nilai baku.
- g. Aturan perkalian.
- h. Permutasi dan Kombinasi.
- i. Peluang.

Kegiatan belajar ini disusun secara cermat sesuai dengan tujuan yang harus dicapai dalam implementasi kurikulum mata pelajaran Matematika di Sekolah Dasar. Materi yang disajikan relevan dengan kompetensi yang harus dimiliki oleh seorang guru profesional ketika mengabdikan dirinya dalam dunia pendidikan untuk mencerdaskan generasi bangsa Indonesia.

Berdasarkan Undang-Undang Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen, pada Pasal 10 ayat (1) menyatakan bahwa “Kompetensi guru sebagaimana dimaksud dalam Pasal 8 meliputi kompetensi pedagogik, kompetensi kepribadian, kompetensi sosial, dan kompetensi profesional”. Jadi, tidak hanya menguasai materi, Anda juga akan mampu mengembangkan materi statistika dan peluang dalam kegiatan pembelajaran di Sekolah Dasar dengan menerapkan pembelajaran yang realistik, kontekstual, aktif, kreatif, dan menyenangkan serta mampu mengembangkan media pembelajaran yang tepat bagi peserta didik Sekolah Dasar.

2. Relevansi

Kegiatan belajar ini juga relevan dengan kompetensi pedagogik. Melalui pembelajaran dengan modul ini Anda akan belajar memahami peserta didik dengan karakter yang beragam dari segi kemampuan berpikir matematis dan merancang perencanaan pelaksanaan pembelajaran serta evaluasi pembelajaran matematika yang sesuai. Kegiatan belajar ini selain berisi materi utama, juga dilengkapi dengan materi penunjang yang dapat dipelajari untuk lebih memperkuat konsep dan pemahaman mengenai pembelajarannya di Sekolah Dasar (SD) yang berupa video, ppt, dan contoh pengembangan lembar kerja pada materi statistika di SD, serta materi peluang. Selain itu juga dilengkapi dengan *link* rujukan yang dapat dipelajari mengenai konsep statistika dan peluang.

Setelah mempelajari modul pada materi utama serta materi penunjang, peserta diharapkan mampu:

- a. Menganalisis data statistik secara deskriptif.
- b. Menganalisis penyajian data dalam bentuk tabel, diagram ataupun grafik.
- c. Menganalisis ukuran pemusatan (mean, median, dan modus) dari data statistik.
- d. Menganalisis ukuran penyebaran (simpangan baku dan variansi) dari data statistik.
- e. Menganalisis nilai baku dari data statistik.
- f. Memecahkan masalah sehari-hari berkaitan dengan teknik membilang, permutasi, kombinasi, dan peluang.

3. Petunjuk Belajar

Untuk membantu Anda dalam memahami modul ini alangkah lebih baik diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut ini:

- f. Bacalah dengan cermat uraian-urien penting yang terdapat dalam modul ini sampai Anda memahami secara tuntas tentang apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.
- g. Temukanlah kata-kata kunci dari kegiatan belajar ini. Alangkah lebih baik apabila Anda mencatat dan meringkas hal-hal penting tersebut.

- h. Pahami modul ini melalui pemahaman dan pengalaman sendiri serta diskusikanlah dengan rekan atau instruktur Anda.
- i. Bacalah dan pelajaryl sumber-sumber lain yang relevan. Anda dapat menemukan bacaan dari berbagai sumber, termasuk dari internet.
- j. Mantapkanlah pemahaman Anda melalui pengerjaan forum diskusi dan tes formatif yang tersedia dalam modul ini dengan baik. Kemudian, nilai sendiri tingkat pencapaian Anda dengan membandingkan jawaban yang telah Anda buat dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada akhir modul.
- k. Diskusikanlah apa yang telah dipelajari, termasuk hal-hal yang dianggap masih sulit, dengan teman-teman Anda.

B. INTI

1. Capaian Pembelajaran

- a. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika sekolah secara mendalam.
- b. Menguasai konsep aplikasi pedagogis (*pedagogical content knowledge*) minimal teori belajar, evaluasi proses dan hasil belajar, kurikulum, dan prinsip-prinsip pembelajaran matematika SD secara mendidik.
- c. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi statistika (penyajian data, ukuran pemusatan data, ukuran penyebaran data, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang).
- d. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika serta kehidupan sehari-hari terkait penyajian data, ukuran pemusatan, ukuran penyebaran, nilai baku, permutasi, kombinasi, dan peluang.

2. Sub Capaian Pembelajaran

- a. Menganalisis data statistik secara deskriptif.

- b. Menganalisis penyajian data dalam bentuk tabel, diagram ataupun grafik.
- c. Menganalisis ukuran pemusatan (*mean*, median, dan modus) dari data statistik.
- d. Menganalisis ukuran penyebaran (*range*, kuartil, simpangan baku dan variansi) dari data statistik.
- e. Menganalisis nilai baku dari data statistik.
- f. Memecahkan masalah sehari-hari berkaitan dengan teknik membilang, permutasi, kombinasi, dan peluang.

3. Uraian Materi dan Contoh

a. Statistik, Statistika, dan Data

1) Pengertian Statistik dan Statistika

Tanpa disadari, sejak lama statistika digunakan di kehidupan sehari-hari. Statistika banyak diterapkan dalam berbagai aspek kehidupan. Saudara tentu sering mendengar beberapa peristiwa seperti contoh berikut ini: *Di jalan tol setiap bulan terjadi 25 kali kecelakaan mobil; uang saku murid SD sekitar Rp10.000 rupiah; ada 5% dari jumlah lulusan Sekolah Dasar di Indonesia tidak melanjutkan lagi ke jenjang berikutnya dan sebagainya.* Beberapa contoh tersebut menggambarkan fakta suatu kejadian yang dilengkapi dengan ukuran. Selain contoh tersebut, kita juga sering menemukan permasalahan yang disajikan dalam bentuk tabel. Pada beberapa permasalahan tabel dapat disertai gambar dalam bentuk diagram maupun grafik. Hal ini bertujuan agar yang disajikan lebih mudah ditangkap pembaca.

NO	PROVINSI	JUMLAH KASUS MEI 2020			TANGGAL 4			JUMLAH KASUS DENGAN FOLLOWUP SPESIMEN ZX NEGATIF			JUMLAH KASUS MENINGGAL		
		S/D 3 MEI 2020	4 MEI 2020	KASUS KUMULATIF	S/D 3 MEI 2020	4 MEI 2020	KUM	S/D 3 MEI 2020	4 MEI 2020	KUM	S/D 3 MEI 2020	4 MEI 2020	KUM
1	ACEH	12	0	12	6	1	7	1	0	1			
2	BALI	262	9	271	151	8	159	4	0	4			
3	BANTEN	432	14	446	34	0	34	41	0	41			
4	BANGKA BELITUNG	20	0	20	4	0	4	1	0	1			
5	BENGKULU	12	0	12	1	0	1	1	0	1			
6	DI YOGYAKARTA	115	0	115	49	1	50	7	0	7			
7	DKI JAKARTA	4460	79	4539	631	1	632	398	10	408			
8	JAMBI	38	0	38	1	0	1	0	0	0			
9	JAWA BARAT	1059	193	1252	153	6	159	85	1	86			
10	JAWA TENGAH	776	22	798	112	0	112	62	0	62			
11	JAWA TIMUR	1117	7	1124	174	4	178	111	6	117			
12	KALIMANTAN BARAT	70	3	73	8	0	8	3	0	3			
13	KALIMANTAN TIMUR	162	5	167	13	0	13	1	0	1			
14	KALIMANTAN TENGAH	157	23	180	15	0	15	7	0	7			
15	KALIMANTAN SELATAN	195	3	198	24	0	24	9	0	9			
16	KALIMANTAN UTARA	122	8	130	5	0	5	1	0	1			
17	KEPULAUAN RIAU	92	0	92	42	0	42	9	0	9			
18	NUSA TENGGARA BARAT	269	0	269	36	0	36	4	0	4			
19	SUMATERA SELATAN	185	0	185	36	7	43	4	1	5			
20	SUMATERA BARAT	195	8	203	35	2	37	15	0	15			
21	SULAWESI UTARA	45	0	45	17	0	17	4	0	4			
22	SUMATERA UTARA	123	6	129	41	0	41	13	0	13			
23	SULAWESI TENGGARA	64	0	64	11	0	11	2	0	2			
24	SULAWESI SELATAN	601	6	607	151	48	199	40	0	40			
25	SULAWESI TENGAH	59	0	59	11	0	11	3	0	3			
26	LAMPUNG	50	4	54	17	0	17	5	0	5			
27	RIAU	53	5	58	26	0	26	5	1	6			
28	MALUKU UTARA	50	0	50	5	0	5	0	0	0			
29	MALUKU	23	0	23	12	0	12	0	0	0			
30	PAPUA BARAT	43	0	43	0	0	0	1	0	1			
31	PAPUA	240	0	240	48	0	48	6	0	6			
32	SULAWESI BARAT	44	0	44	4	0	4	1	0	1			
33	NUSA TENGGARA TIMUR	10	0	10	1	0	1	0	0	0			
34	GORONTALO	15	0	15	2	0	2	1	0	1			
Dalam Proses Verifikasi di Lapangan		22	0	22	0	0	0	0	0	0			
TOTAL		11192	395	11587	1876	78	1954	845	19	864			

Gambar 1. Contoh Tabel “Data Kasus Covid di Indonesia”
Sumber: <https://covid19.kemkes.go.id/>



Gambar 2. Contoh Grafik “Kasus Konfirmasi Covid di Indonesia”
Sumber: <https://www.cnbcindonesia.com/news/>

Statistik merupakan kesimpulan fakta berbentuk bilangan yang disusun dalam bentuk daftar atau tabel yang menggambarkan suatu kejadian. Data yang diperoleh dari hasil pengamatan disusun dan disajikan dalam bentuk bilangan-bilangan pada sebuah daftar atau tabel, inilah yang dinamakan dengan statistik. Statistik juga melambangkan ukuran dari sekumpulan data dan wakil dari data tersebut.

Sekumpulan data yang digunakan untuk menjelaskan masalah dan menarik kesimpulan yang benar tentunya harus melalui beberapa proses, yaitu meliputi proses pengumpulan data, pengolahan data, dan penarikan kesimpulan. Untuk itu kita memerlukan pengetahuan tersendiri yang disebut dengan statistika. *Statistika* adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan data, penganalisisan data, dan penarikan kesimpulan berdasarkan data yang ada. Statistika juga dapat diartikan sebagai metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, perhitungan, penggambaran dan penganalisisan data, serta penarikan kesimpulan berdasarkan penganalisisan yang dilakukan.

Pada pembelajaran di sekolah dasar, pernahkah kita mengajak siswa untuk mengukur tinggi badan, mengukur berat badan, mendata banyak buku yang dibawa, dll? Proses yang dilakukan merupakan proses pengumpulan data. Biasanya siswa melakukan dengan mencatat setiap data yang diperoleh. Setelah data dikumpulkan, siswa dapat mengelompokkan sesuai dengan kategori yang telah ditentukan. Proses ini merupakan contoh dari salah satu proses pengolahan data. Pada akhirnya, siswa dapat menceritakan terkait data yang telah dikumpulkan atau dapat menyimpulkan terkait data-data yang dikumpulkan.

2) Data

Data merupakan sejumlah informasi yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah, baik yang berupa bilangan maupun yang berbentuk kategori, misalnya: baik, buruk, tinggi, rendah dan

sebagainya. Data dikatakan baik apabila memenuhi beberapa persyaratan sebagai berikut:

- a) Objektif, artinya data yang dikumpulkan harus dapat menggambarkan keadaan yang sebenarnya.
- b) Relevan, artinya data yang dikumpulkan mempunyai kaitan dengan permasalahan yang akan diteliti.
- c) Sesuai zaman (*up to date*), artinya data tidak boleh ketinggalan zaman (usang), dengan berkembangnya waktu dan teknologi maka menyebabkan suatu kejadian dapat mengalami perubahan dengan cepat.
- d) Representatif, artinya data yang dikumpulkan melalui teknik *sampling* harus dapat mewakili dan menggambarkan keadaan populasinya.
- e) Dapat dipercaya, artinya data yang dikumpulkan diperoleh dari sumber data yang tepat.

3) Macam-Macam Data

a) Menurut Sifat Data

Menurut sifatnya, data dibagi menjadi data kualitatif dan data kuantitatif. Data kualitatif adalah data yang tidak berbentuk bilangan, tetapi berbentuk kategori atau atribut. Contoh data kuantitatif antara lain banyak siswa SD di Kecamatan Sukawangi ada 1745 orang, tinggi rerata siswa SD Kelas II adalah 120 cm dan sebagainya. Contoh data kualitatif antara lain baik, buruk, tinggi, rendah, besar, kecil, cukup, dan sebagainya. Data kuantitatif adalah data yang berbentuk bilangan.

Data kuantitatif dibagi menjadi dua bagian yaitu data diskrit dan data kontinu. Data diskrit adalah data yang diperoleh dengan cara menghitung atau membilang. Contoh data diskrit adalah banyak siswa kelas III SD Sukawangi ada 35 siswa. Data kontinu adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur. Contoh data kontinu adalah tinggi badan Andi adalah 145 cm.

b) Menurut Cara Memperoleh Data

Menurut cara memperoleh data, data dibagi menjadi data primer dan data sekunder. Data primer adalah data yang dikumpulkan langsung pada sumber datanya. Contoh data primer adalah seorang guru ingin mengetahui kemampuan pemahaman siswa, untuk itu guru memberikan tes pemahaman langsung kepada siswa. Data sekunder adalah data yang dikumpulkan tidak langsung dari sumber datanya tetapi melalui pihak lain. Contoh data sekunder misalnya data peringkat literasi siswa yang telah dirangkum oleh INAP (*Indonesia National Assessment Program*).

c) Menurut Sumber Data

Menurut sumber data, data dibagi menjadi data internal dan data eksternal. Data internal adalah data yang menggambarkan keadaan dalam suatu organisasi itu sendiri. Contoh data internal suatu sekolah adalah data kepala sekolah, data guru, data siswa dan sebagainya. Data eksternal adalah data yang menggambarkan keadaan di luar organisasi itu. Contoh data eksternal adalah data yang menggambarkan faktor-faktor yang mempengaruhi suatu sekolah, seperti data mengenai pendapatan orang tua siswa, data pekerjaan orang tua siswa, dan lain-lain.

b. Penyajian Data

Mengajarkan penyajian data untuk siswa dapat kita mulai dari hal-hal yang sederhana dan dekat dengan siswa. Siswa dapat kita minta untuk mendata banyak siswa laki-laki dan perempuan di suatu kelas tertentu. Selain itu kita dapat meminta siswa untuk mendata banyak buku yang dibawa oleh setiap siswa, mendata tinggi badan siswa, berat badan siswa, dan lain-lain. Lebih jelasnya dapat dilihat pada uraian di bawah ini:

1) Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

DATA KETERSEDIAAN TEMPAT TIDUR RUMAH SAKIT YANG MERAWAT PASIEN COVID-19 DI KOTA PONTIANAK Tanggal : 7 Februari 2022							
Rumah Sakit Penanggulangan Covid 19	Ketersediaan Tempat tidur ICU pasien covid19 + Suspek	Jumlah tempat tidur ICU terisi pasien positif Covid19 + Suspek	BOR ICU (%)	Ketersediaan tempat tidur isolasi Positif covid19 + Suspek	Jumlah tempat tidur terisi positif Covid19	Jumlah kamar tidur terisi suspek	BOR Isolasi (%)
RS Mitra Medika Pontianak	0	0	0.00	15	7	1	53.33
RSUD SSM Alkadrie (RS Kota)	6	0	0.00	79	1	2	3.80
RS Antonius	10	1	10.00	58	8	0	13.79
RSUD dr. Soedarso	12	0	0.00	128	4	5	7.03
RS Untan	1	0	0.00	15	1	5	40.00
RS Lapangan Covid19 (RUSUNAWA)	0	0	0.00	96	2	0	2.08
RSU Anton Soedjarwo	2	0	0.00	10	4	1	50.00
RS Kharitas Bhakti	0	0	0.00	1	0	0	0.00
Total	31	1	3.23	402	27	14	10.20

Layanan Cepat Tanggap :
Telp : 0561 737631 / Wa : 0821 5702 2858
Website: <http://dinkes.pontianakkota.go.id>

Sumber Data :
Satuan Tugas COVID-19 Kota Pontianak

<https://covid19.pontianakkota.go.id/>

Gambar 3. Contoh Tabel “Data Ketersediaan Tempat Tidur RS”
Sumber: <https://covid19.pontianakkota.go.id/>

Apabila kita disajikan informasi dengan bentuk seperti gambar di atas, apakah data tersebut mudah dibaca? Tentu saja lebih mudah dibaca. Misalkan kita memiliki sekumpulan data dan data tersebut masih belum tersusun secara teratur, maka pembaca yang disajikan informasi tersebut akan sulit dalam memahami data tersebut. Tabel digunakan untuk menyajikan data agar lebih mudah dibaca penerima pesan.

Berikut ini diberikan beberapa contoh dan cara menyajikan data dalam bentuk tabel daftar statistik. Macam-macam tabel daftar statistik yang telah dikenal diantaranya adalah:

a) Tabel Daftar Baris Kolom

Tabel daftar baris kolom merupakan penyajian data dalam bentuk tabel dengan susunan baris dan kolom yang saling berhubungan. Misalkan

kita meminta siswa untuk menanyakan dan mendata banyak siswa laki-laki dan perempuan kelas I, II, III, IV, V, dan VI SD Cicarita pada wali kelas masing-masing. Data yang siswa peroleh dapat disajikan dalam tabel daftar baris dan kolom. Berikut adalah contoh tabel daftar baris kolom:

Tabel 3.1
Banyak Siswa Kelas IV SD Cicarita Tahun Ajaran 2018/2019

Kelas	Semester Ganjil		Semester Genap	
	Laki-Laki	Perempuan	Laki-Laki	Perempuan
I	21	19	21	21
II	18	17	20	17
III	23	21	22	21
IV	16	20	17	20
V	18	18	19	20
VI	19	21	19	21
JUMLAH	115	116	118	120

Catatan : data fiktif

b) Tabel Daftar Kontingensi

Tabel kontingensi merupakan tabel yang dapat digunakan untuk mengukur hubungan (asosiasi) antara dua variabel kategorik. Tabel kontingensi merangkum frekuensi pada setiap kategori variabel. Data yang terdiri atas dua variabel dimana setiap variabel terdiri atas m katagori dan variabel yang lain terdiri dari n katagori. Dapat dibuat daftar kontingensi berukuran $m \times n$ dimana m menyatakan baris dan n menyatakan kolom. Untuk membuat tabel daftar kontingensi, kita meminta siswa secara berkelompok untuk mendata banyak siswa yang bersekolah pada jenjang SD, SMP, dan SMA di wilayah RTnya masing-masing. Misalkan data yang didapat oleh siswa dirangkum pada tabel daftar kontingensi sebagai berikut:

Tabel 3.2
Jumlah Siswa di Wilayah RT 03 RW 14 Kelurahan Sukamandi
menurut Jenjang Sekolah dan Jenis Kelamin Tahun Ajaran
2019/2020

Jenis Kelamin	Tingkat Sekolah			
	SD	SMP	SMA	Jumlah
Laki-Laki	6	8	9	23
Perempuan	11	6	8	25
Jumlah	17	14	17	48

Catatan : data fiktif

c) Tabel Daftar Distribusi Frekuensi

Data kuantitatif dapat dibuat menjadi beberapa kelompok atau kelas dan disajikan dalam bentuk tabel. Pembelajaran yang dapat dilakukan di kelas untuk mengenalkan penyajian data menggunakan tabel distribusi frekuensi kepada siswa, kita dapat mengajak siswa untuk mendata nilai matematika siswa kelas IV. Misalkan diperoleh data sebagai berikut:

90, 100, 85, 95, 75, 85, 80, 95, 70, 85, 75, 95, 90, 100, 90, 85, 75, 100, 80, 95, 100, 95, 75, 95, 85, 90, 70, 85, 75, 95, 85, 90, 75, 100, 95.

Tabel distribusi frekuensi dari data tersebut adalah:

Tabel 3.3
Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

NILAI	FREKUENSI
70	2
75	6
80	2
85	7
90	5
95	8
100	5
Jumlah	35

Catatan: data fiktif

2) Penyajian Data Dalam Bentuk Diagram

Tujuan dari menyajikan data statistik dalam bentuk diagram adalah untuk memudahkan dalam memberikan informasi secara visual. Terdapat bermacam-macam bentuk diagram, yaitu diagram lambang, diagram batang, dan diagram lingkaran.

a) Diagram Lambang

Diagram lambang digunakan untuk menyajikan data statistik dalam bentuk gambar-gambar dengan ukuran tertentu yang menunjukkan jumlah masing-masing data. Misalkan kita meminta siswa untuk mendata banyak buku yang terdapat di perpustakaan sekolah, data yang diperoleh siswa dirangkum pada Tabel 3.4 berikut ini:

Tabel 3.4
Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame

Jenis buku	Jumlah
Kamus	30
Cerita Fabel	40
Pengetahuan	70
Dongeng	50
Agama	60
Jumlah	250

Data dari tabel tersebut dapat kita ubah dalam diagram lambang menjadi seperti berikut ini:

Diagram 3.1

Jumlah Buku di Perpustakaan SD Sukarame

Tahun	Banyak Mobil
Kamus	
Cerita Fabel	
Pengetahuan	
Dongeng	
Agama	

Keterangan :

 : mewakili 10 buku

b) Diagram Batang

Diagram batang dapat digunakan untuk membandingkan banyak suatu data dengan data yang lain. Perhatikan contoh diagram berikut ini.



Gambar 4. Contoh Diagram “Gejala Penderita Covid”
 Sumber <https://www.kompas.com/>

Apabila kita perhatikan, diagram tersebut menyajikan data terkait gejala yang dialami penderita. Dimana, gejala yang satu dengan yang lain saling bebas atau tidak saling mempengaruhi. Banyak penderita dengan suatu gejala tidak dipengaruhi oleh gejala yang lain.

Diagram batang digunakan untuk menunjukkan kuantitas setiap kategori yang saling independen atau saling bebas. Banyak data setiap batang tidak saling mempengaruhi batang yang lain. Perhatikan contoh selanjutnya. Misalkan guru dan siswa mendata banyak siswa yang ada di SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun 2019/2020, data yang diperoleh guru dan siswa dirangkum pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5
Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil
Tahun Ajaran 2019/2020

Kelas	Jumlah Siswa
I	31
II	32
III	33
IV	31
V	32
Jumlah	159

Dari Tabel 3.5 selanjutnya akan disusun dalam diagram batang seperti berikut ini:

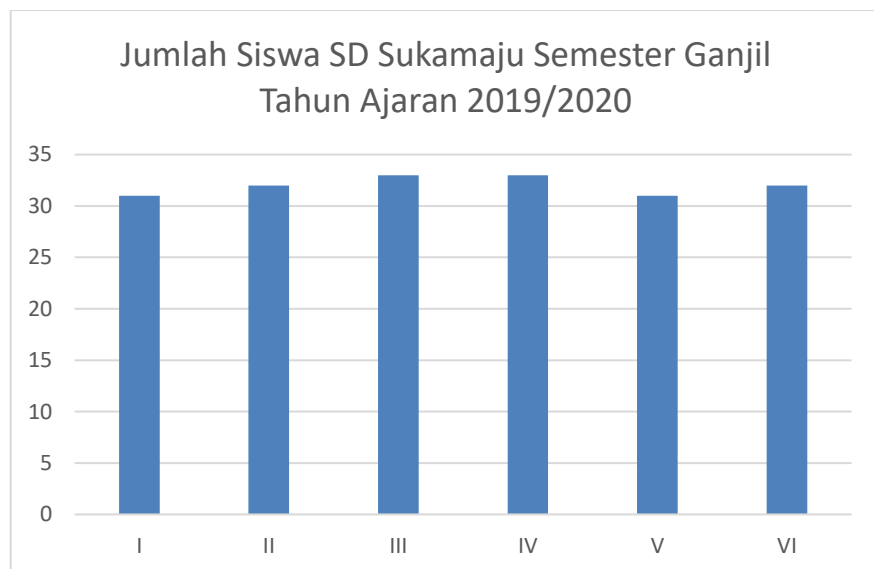


Diagram 3.2
Jumlah Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran
2019/2020

Penyajian diagram batang, selain tampak pada Diagram 3.2, juga dapat menyajikan dua atau lebih data untuk menyatakan nilai dalam satu waktu tertentu. Perhatikan contoh Tabel 3.6 berikut ini:

Tabel 3.6
Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil
Tahun Ajaran 2019/2020

Kelas	Banyak Siswa	
	Laki-Laki	Perempuan
I	17	14
II	21	11
III	15	18
IV	16	17
V	18	13
VI	14	18

Diagram batang dari Tabel 3.6 tersebut sebagai berikut:

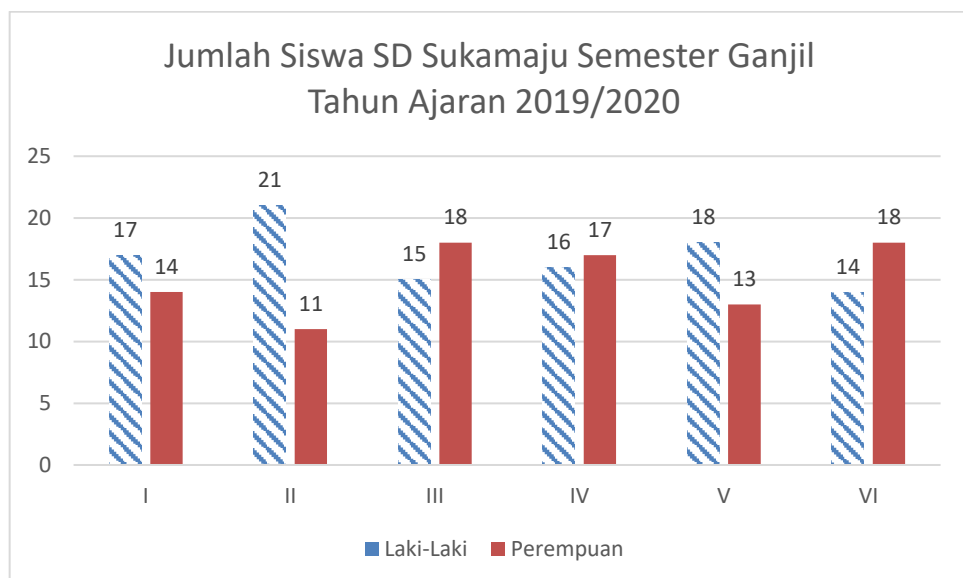
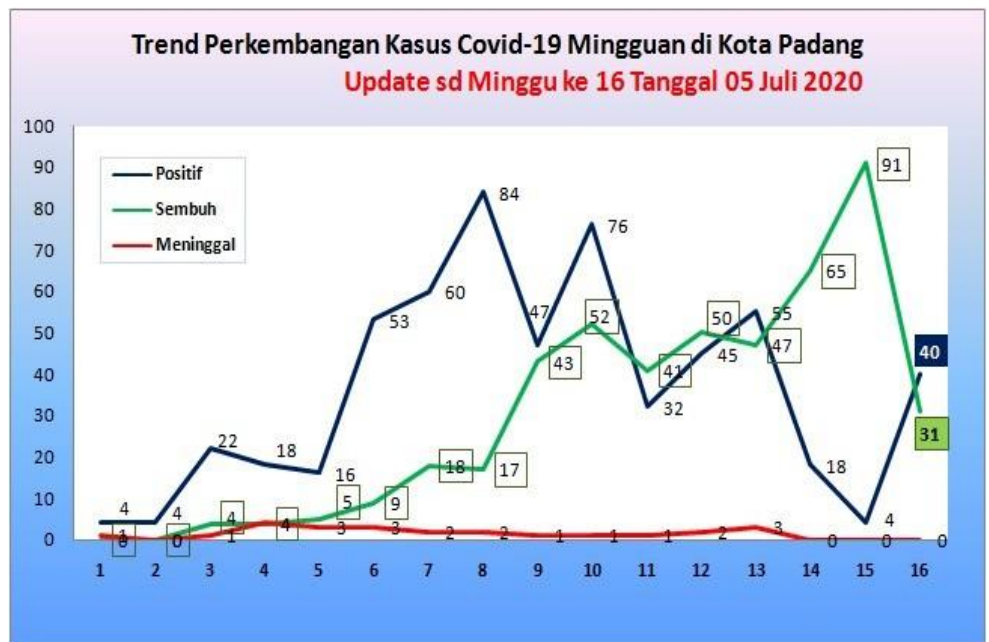


Diagram 3.3
Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran
2019/2020

c) Grafik

Pada suatu kondisi tertentu, kita akan menyajikan atau disajikan suatu penyajian data yang menggambarkan bagaimana perubahan data berdasarkan waktunya. Misalkan data penderita covid berikut ini.



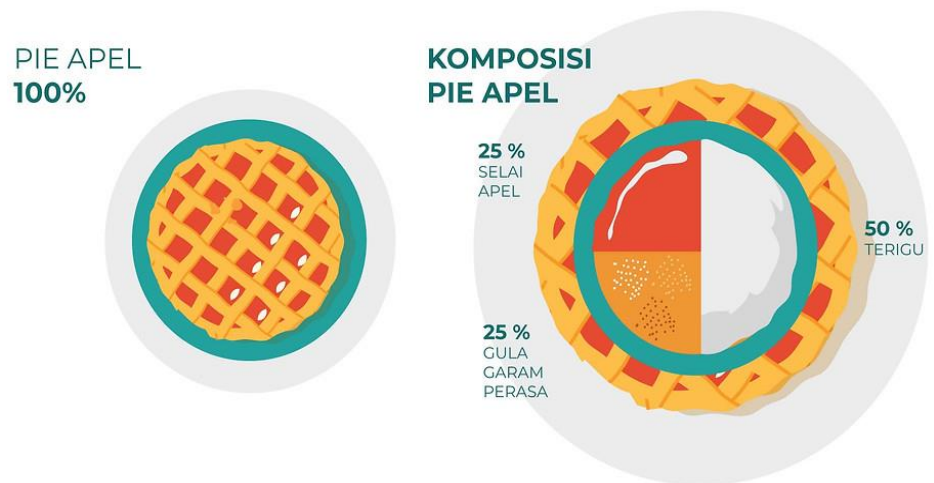
Gambar 7. Contoh Grafik “Trend Perkembangan Kasus Covid-19”

Sumber: <https://dinkes.padang.go.id/>

Grafik dapat kita gunakan untuk menyajikan data yang saling berhubungan. Selain itu, grafik digunakan untuk menyajikan data yang berkesinambungan, untuk melihat trend kenaikan atau penurunan suatu data.

d) Diagram Lingkaran

Perhatikan diagram berikut ini:



Gambar 5. Contoh Diagram Lingkaran (*pie chart*)

Sumber: <https://www.poligrabs.com/>

Diagram lingkaran tersebut menggambarkan komposisi bahan-bahan yang digunakan dalam pembuatan pie apel. Pada satu adonan pie apel, setengahnya adalah terigu, sisanya adalah selai apel dan bahan lain (gula, garam, dan perasa).

Secara umum, diagram lingkaran digunakan untuk mengilustrasikan proporsi persentasi setiap bagian. Diagram lingkaran digunakan untuk menampilkan suatu keseluruhan dibagi menjadi beberapa bagian.

Diagram lingkaran merupakan sebuah penyajian data dalam bentuk lingkaran didasarkan pada pembagian sebuah lingkaran dalam beberapa bagian sesuai dengan jenis data yang akan disajikan. Perhatikan contoh selanjutnya.

Tabel 3.7
Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran
2019/2020

Kelas	Banyak Siswa		Jumlah
	Laki-Laki	Perempuan	
I	17	14	31
II	21	11	32
III	15	18	33
IV	16	17	33
V	18	13	31
VI	14	18	32
Jumlah	101	91	192

Berdasarkan Tabel 3.7 tersebut dapat dibuat diagram lingkaran sebagai berikut:

Diagram lingkaran banyak siswa laki-laki

Sebelum menggambar diagram batang banyak siswa laki-laki, maka kita akan menentukan dulu besar daerah dari masing-masing kelas.

Kelas n: $\frac{\text{banyak data pada kelas } n}{\text{banyak data seluruhnya}} \times 100\%$ atau

Kelas n: $\frac{\text{banyak data pada kelas } n}{\text{banyak data seluruhnya}} \times 360^\circ$

Kelas 1: $\frac{17}{101} \times 100\% = 16,83\% \approx 17\%$ atau

Kelas 1: $\frac{17}{101} \times 360^\circ = 60,59^\circ$

Coba Anda cari untuk kelas yang lain!

Setelah mendapat besar bagian setiap kelas, maka diagram lingkarannya adalah sebagai berikut!

Banyak Siswa Laki-Laki SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

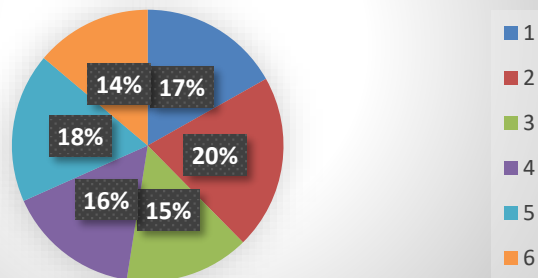


Diagram 3.4

Banyak Siswa Laki-Laki SD Sukamaju Semester Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Selanjutnya, coba Anda buat diagram lingkaran untuk menyatakan banyak siswa perempuan SD Sukamaju semester ganjil tahun 2019/2020 dan diagram lingkaran untuk menyatakan banyak siswa keseluruhan SD Sukamaju semester ganjil tahun ajaran 2019/2020. *Coba Anda lihat dan cocokkan hasil yang Anda buat dengan diagram berikut ini:*

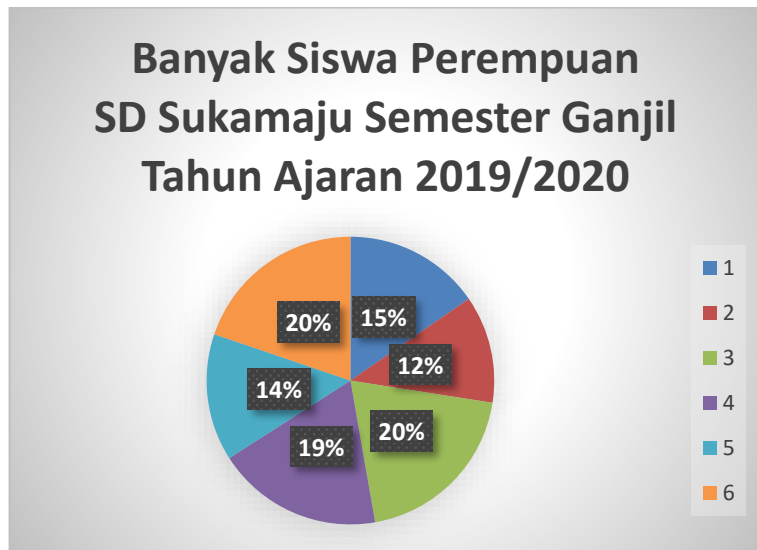


Diagram 3.5
Banyak Siswa Perempuan SD Sukamaju Semester
Ganjil Tahun Ajaran 2019/2020

Diagram 3.5 menunjukkan banyak siswa perempuan SD Sukamaju semester ganjil 2019/2020. Diagram 3.6 menunjukkan banyak siswa seluruhnya.

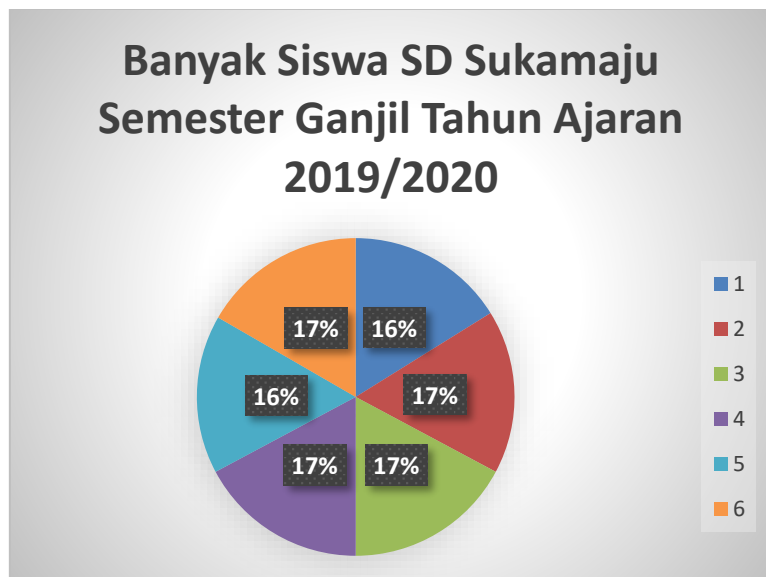


Diagram 3.6
Banyak Siswa SD Sukamaju Semester Ganjil
Tahun Ajaran 2019/2020

c. Distribusi Frekuensi

Distribusi frekuensi adalah suatu susunan data mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar dan membagi banyaknya data menjadi beberapa kelas. Proses membuat sebuah tabel distribusi frekuensi, terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui adalah:

1. Interval kelas: yaitu banyak data yang dikelompokkan dalam bentuk rentang (interval) $a-b$, dimana data dimulai dari yang bernilai a sampai dengan data yang bernilai b . Data diurutkan dari terkecil sampai dengan terbesar, secara berurutan mulai kelas interval pertama sampai dengan interval terakhir.
2. Frekuensi: yaitu banyaknya data pada suatu kelas interval tertentu. Banyak kelas dapat ditentukan dengan menggunakan aturan *Sturges*, $k = 1 + 3,3 \log n$.
3. Batas kelas interval: yaitu bilangan yang terletak di sebelah kiri dan kanan suatu kelas interval, meliputi batas bawah dan batas atas.
4. Panjang kelas interval: yaitu selisih antara dua tepi bawah yang berurutan.
5. Tepi kelas interval; Tepi kelas interval dibagi menjadi 2, yaitu tepi atas dan tepi bawah. Tepi bawah kelas interval = batas bawah – 0,5, dan tepi atas kelas interval = batas atas + 0,5 (untuk data yang dicatat sampai dengan satu satuan, untuk data hingga satu desimal batas bawah yaitu ujung bawah dikurangi 0,05 dan batas atas yaitu ujung atas ditambah 0,05, jika tercatat hingga dua desimal maka angka pengurang/penambahnya menjadi 0,005 dan begitu seterusnya).
6. Nilai Tengah: yaitu nilai data yang diambil sebagai wakil dari kelas interval itu yaitu dengan menggunakan rumus: $\frac{1}{2} (ujung\ bawah + ujung\ atas)$.

Perhatikan data nilai siswa berikut ini, misalkan kita mempunyai kumpulan data nilai tentang pelajaran matematika dari sebanyak 80 siswa, dan kita akan membuat tabel distribusi frekuensinya.

Data nilai matematika dari 80 siswa adalah sebagai berikut

75	84	68	82	68	90	62	88	93	76
88	79	73	73	61	62	71	59	75	85
75	65	62	87	74	93	95	78	72	63
82	78	66	75	94	77	63	74	60	68
89	78	96	62	75	95	60	79	71	83
67	62	79	97	71	78	85	76	65	65
73	80	65	57	53	88	78	62	76	74
73	67	86	81	85	72	65	76	75	77

Untuk membuat distribusi frekuensi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut ini :

- a. Menentukan rentang (jangkauan).

Rentang atau jangkauan adalah selisih antara data terbesar dengan data terkecil. Menentukan rentang dapat menggunakan rumus berikut ini: $r = x_{max} - x_{min}$

Keterangan :

r = rentang

x_{max} = data terbesar

x_{min} = data terkecil

Contoh :

Rentang dari data nilai matematika 80 siswa adalah :

$$r = x_{max} - x_{min}$$

$$x_{max} = \text{data terbesar} = 97$$

$$x_{min} = \text{data terkecil} = 53$$

$$r = 97 - 53 = 44$$

- b. Menentukan banyak kelas interval.

Banyak kelas harus dibuat sedemikian rupa agar semua data nilai bisa tercakup pada kelas interval. Bila kelas intervalnya terlalu sedikit maka informasi yang diberikan akan menjadi tidak lengkap. Jumlah kelas yang sedikit mengakibatkan interval kelasnya menjadi

besar sehingga variasi yang terinci secara individual akan hilang, atau sebaliknya bila jumlah interval terlalu banyak maka perhitungan menjadi tidak praktis dan pola frekuensinya menjadi kosong. Untuk menetapkan banyak kelas interval, dapat digunakan aturan *Sturges* yaitu:

$$k = 1 + 3,3 \log n$$

Keterangan:

k = banyak kelas

n = banyak data

Perhatikan kembali data nilai matematika siswa pada halaman 154.

Dari data nilai matematika di atas diperoleh:

$$k = 1 + (3,3) \log 80$$

$$k = 1 + (3,3) (1,9031)$$

$$k = 1 + 6,3 = 7,3 \text{ (dibulatkan menjadi 7)}$$

Banyak kelas interval dari data nilai matematika tersebut adalah 7 kelas.

c. Panjang kelas interval.

Panjang kelas interval adalah rentang dibagi dengan banyaknya kelas. Maka untuk menentukan panjang kelas interval ini

digunakan rumus : $Panjang\ kelas = \frac{Rentang}{banyak\ kelas}$.

Perhatikan kembali contoh data nilai matematika pada halaman 17.

Dari data nilai matematika di atas:

$$Rentang = 97 - 53 = 44$$

$$Banyak\ kelas\ (k) = 7$$

$$Panjang\ kelas = \frac{44}{7} = 6,29, \text{ dibulatkan ke atas menjadi } 7$$

d. Batas bawah kelas pertama.

Memilih batas bawah kelas pertama dapat dilakukan dengan memilih nilai terkecil dari suatu data atau nilai yang lebih kecil dari data terkecil (dengan catatan selisihnya harus kurang dari panjang kelas).

Sebagai contoh, pada penyusunan tabel frekuensi untuk data nilai matematika, kita akan memilih 52 sebagai batas bawah kelas pertama (catatan: Anda boleh memilih bilangan yang lain sebagai tepi bawah kelas pertama). Perhatikan Tabel 3.8 berikut ini:.

Tabel 3.8
Distribusi Frekuensi Nilai Matematika

Nilai	Turus	Frekuensi
52 - 58	II	2
59 - 65	III III-III-I	16
66 - 72	III III II	12
73 - 79	III III III III III II	27
80 - 86	III-III	10
87 - 93	III III	8
94 - 100	III	5
Jumlah		80

d. **Distribusi Frekuensi Relatif**

Distribusi frekuensi relatif yaitu frekuensi dari sebuah daftar distribusi yang dinyatakan dalam bentuk persen. Frekuensi relatif dapat dihitung dengan rumus: $\frac{\text{frekuensi pada kelas ke-}n}{\text{jumlah frekuensi}} \times 100\%$. Perhatikan data pada Tabel 3.9, frekuensi relatif dari setiap kelas dihitung seperti di bawah ini:

Frekuensi relatif kelas pertama: $\frac{2}{80} \times 100\% = 2,5\%$.

Frekuensi relatif kelas kedua: $\frac{16}{80} \times 100\% = 20\%$.

Coba Anda tentukan frekuensi relatif pada kelas yang lain!

Tabel 3.9
Frekuensi Relatif Data Nilai Matematika Siswa

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Relatif (%)
52 – 58	2	2,50
59 - 65	16	20,00
66 - 72	12	15,00
73 - 79	27	33,75
80 - 86	10	12,50
87 - 93	8	10,00
94 – 100	5	6,25
Jumlah	80	100,00

e. Ukuran Pemusatan Data

Ukuran pemusatan data adalah nilai dari data yang dapat memberikan gambaran yang lebih jelas dan singkat mengenai keadaan pusat data yang dapat mewakili seluruh data. Ukuran pemusatan data meliputi *mean* (rerata), median, dan modus.

1) Rerata (*mean*)

Rerata atau *mean* merupakan salah satu ukuran gejala pusat. Rerata dapat dikatakan sebagai wakil kumpulan data. Menentukan rerata data tunggal dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan seluruh nilai data dan membagi dengan banyak data, atau dapat ditulis dengan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{\text{Jumlah seluruh data}}{\text{Banyak data}}$$

Keterangan:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \text{rerata} \\ \Sigma x &= \text{jumlah seluruh data} \\ n &= \text{banyak data}\end{aligned}$$

Contoh 1:

Hitung rerata dari 6, 5, 9, 7, 8, 8, 7, 6.

Penyelesaian:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5+6+6+7+7+8+8+9}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{56}{8}$$

$$\bar{x} = 7$$

Contoh 2:

Perhatikan Tabel 3.10 berikut ini:

Tabel 3.10
Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai	Frekuensi
70	2
75	6
80	2
85	7
90	5
95	8
100	5
Jumlah	35

Tentukanlah rerata nilai matematika siswa kelas IV SD Sukamaju!

Untuk menentukan nilai rerata data pada Tabel 3.10, kita dapat menjumlahkan semua data dibagi banyak data, atau kita dapat

menggunakan rumus: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

Keterangan:

$\bar{x}$ = rerata

f_i = frekuensi data ke - i

x_i = data kelas ke - i

$f_i x_i$ = hasil kali data kelas ke - i dengan frekuensi data ke - i

Tabel 3.11

Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i x_i$
70	2	140
75	6	450
80	2	160
85	7	595
90	5	450
95	8	760
100	5	500
Jumlah	35	3055

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{3055}{35} = 87,29$$

Contoh 3:

Terdapat 40 siswa kelas V yang mengikuti tes matematika didapat data sebagai berikut: siswa yang memperoleh nilai 4 ada 5 orang, nilai 5 ada 10 orang, nilai 6 ada 12 orang, nilai 7 ada 8 orang, nilai 8 ada 3 orang, dan nilai 9 ada 2 orang. Tentukan nilai rerata 40 siswa tersebut!

Penyelesaian:

Menentukan nilai rerata 40 orang siswa dapat dilakukan dengan:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{(4 \times 5) + (5 \times 10) + (6 \times 12) + (7 \times 8) + (8 \times 3) + (9 \times 2)}{40} \\ &= \frac{20 + 50 + 72 + 56 + 24 + 18}{40} = \frac{240}{40} = 6\end{aligned}$$

Contoh 4:

Pada sebuah kelas terdapat 16 siswa laki-laki dan 14 siswa perempuan. Nilai rerata tes siswa laki-laki adalah 7,85 dan nilai rerata tes siswa perempuan adalah 8,06. Berapakah nilai rerata 30 siswa tersebut?

Penyelesaian:

Menentukan nilai rerata 30 siswa tersebut artinya bahwa kita akan mencari nilai rerata gabungan dari siswa laki-laki dan siswa perempuan.

Karena $\bar{x} = \frac{\text{Jumlah seluruh data}}{\text{Banyak data}}$ maka:

$$\text{Jumlah seluruh data} = \bar{x} \times \text{banyak data}.$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{(\bar{x}_l \times \text{banyak siswa laki-laki}) + (\bar{x}_p \times \text{banyak siswa perempuan})}{\text{banyak siswa seluruhnya}}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{(16 \times 7,85) + (14 \times 8,06)}{30}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{(125,6) + (112,84)}{30}$$

$$\text{Rerata gabungan} = \frac{238,44}{30} = 7,948$$

Contoh 5:

Pada sebuah kelas terdapat 19 siswa laki-laki dan 17 siswa perempuan. Nilai rerata tes siswa keseluruhan adalah 8,59 dan nilai rerata tes siswa perempuan adalah 8,54. Berapakah nilai rerata siswa laki-laki?

Penyelesaian:

Berbeda dengan Contoh 4, pada contoh ini nilai rerata gabungan telah diketahui, sehingga:

$$\text{Rerata siswa laki - laki} = \frac{(\bar{x}_{gab} \times \text{banyak siswa}) - (\bar{x}_p \times \text{banyak siswa perempuan})}{\text{banyak siswa laki-laki}}$$

$$\text{Rerata siswa laki - laki} = \frac{(36 \times 8,59) - (17 \times 8,54)}{19}$$

$$\text{Rerata siswa laki - laki} = \frac{(309,24) - (145,18)}{19}$$

$$\text{Rerata siswa laki - laki} = \frac{164,06}{19} = 8,63$$

Bahasan selanjutnya adalah mencari nilai rerata dari data yang telah dikelompokkan dalam daftar distribusi frekuensi. Menentukan nilai rerata data yang telah dikelompokkan dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang melibatkan titik tengah setiap kelas yaitu:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Keterangan:

$\bar{x}$ = rerata

f_i = frekuensi data ke - i

x_i = nilai tengah kelas ke - i

$f_i x_i$ = hasil kali nilai tengah data kelas ke- i dengan frekuensi data ke- i

Contoh 6:

Tentukan nilai rerata dari data yang terdapat pada Tabel 3!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 3.9 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	Nilai tengah (x_i)	$f_i \times x_i$
52 – 58	2	55	110
59 - 65	16	62	992
66 - 72	12	69	828
73 - 79	27	76	2052
80 - 86	10	83	830
87 - 93	8	90	720
94 – 100	5	97	485
Jumlah	80		6017

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6017}{80} = 75,21$$

2) Median dan Kuartil

Median (Me) adalah nilai tengah dari sekumpulan data yang telah diurutkan, mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar atau sebaliknya. Jika banyak data merupakan bilangan ganjil, maka median terletak pada data ke- $\frac{1}{2}(n + 1)$, dan jika banyak data merupakan bilangan genap maka median terletak diantara data ke- $\frac{n}{2}$ dan data ke- $\frac{n}{2} + 1$.

Contoh 7:

Tentukan median dari :

65, 70, 90, 40, 35, 45, 70, 80, 50.

Pada contoh ini banyak data yang tersedia merupakan bilangan ganjil.

Setelah diurutkan datanya menjadi:

35, 40, 45, 50, **65**, 70, 70, 80, 90

Jadi $Me = 65$.

Contoh 8:

Tentukan median dari:

3, 2, 5, 2, 4, 6, 6, 7, 9, 6.

Pada contoh ini banyak data yang tersedia merupakan bilangan genap, median akan terletak diantara dua buah data. Setelah diurutkan:

2, 2, 3, 4, **5, 6**, 6, 6, 7, 9.

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5,5.$$

Contoh 9:

Tentukan median dari data yang terdapat pada Tabel 3.10 halaman 158!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 3.10 adalah data tunggal, sehingga untuk memudahkan menentukan median, kita tentukan terlebih dahulu frekuensi kumulatifnya.

Tabel 3.12
Nilai Matematika Siswa Kelas IV SD Sukamaju

Nilai	Frekuensi (f)	Frekuensi kumulatif (f_{kum})
70	2	2
75	6	8
80	2	10
85	7	17
90	5	22
95	8	30
100	5	35

Banyak data pada Tabel 3.12 tersebut merupakan bilangan ganjil, maka median akan terletak pada data ke- $\frac{1}{2}(n + 1)$ atau terdapat pada data ke- $\frac{1}{2}(35 + 1)$. Karena median terletak pada data ke-18, maka median data tersebut adalah **90** (*mengapa?* Berdasarkan data tersebut maka data ke-

1 dan data ke-2 nilainya 70, data ke- 3 sampai data ke-8 nilainya 75, data ke-9 sampai data ke-10 nilainya 80, dan seterusnya).

Bahasan selanjutnya adalah bagaimana kita menentukan median pada data yang berkelompok. Menentukan Me data yang telah dikelompokkan dapat menggunakan rumus:

$$Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$$

Keterangan:

Me = Median.

b = Tepi bawah kelas median.

p = Panjang kelas median.

f = Frekuensi kelas median.

F = Jumlah semua frekuensi sebelum kelas median.

n = Banyak data.

Contoh 10:

Tentukanlah median pada data Tabel 3.9!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 3.9 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	f_{kum}
52 – 58	2	2
59 - 65	16	18
66 - 72	12	30
73 - 79	27	57
80 - 86	10	67
87 - 93	8	75
94 - 100	5	80
Jumlah	80	

Karena banyak data 80, maka median akan berada diantara data ke- 40 dan data ke-41 yang berada pada kelas interval 73-79 (**mengapa?** Karena data ke- 31 sampai data ke- 57 nilainya pada interval 73-79).

Tepi bawah kelas median (b) = $73 - 0,5 = 72,5$.

Panjang kelas (p) = 7 (**mengapa?** Dari 73 – 79 terdapat 7 data).

$$Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$$

$$Me = 72,5 + 7 \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \times 80 \right) - 30}{27} \right)$$

$$Me = 72,5 + 7 \left(\frac{10}{27} \right)$$

$$Me = 72,5 + 2,59$$

$$Me = 75,09$$

Seperi kita ketahui bersama, median membagi data menjadi dua bagian yang sama. Apabila kelompok data setelah diurutkan dibagi menjadi empat bagian yang sama banyak, maka kita akan dapat menentukan ukuran yang lain yaitu Q_1 , Q_2 , dan Q_3 atau yang sering juga disebut dengan kuartil pertama, kuartil kedua, dan kuartil ketiga. Q_2 atau kuartil kedua disebut juga dengan median. Untuk menentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 dapat menggunakan aturan sebagai berikut:

$$Q_i = \text{nilai pada data ke } - \frac{i(n+1)}{4}, i = 1,2,3$$

Perhatikan kembali Contoh 7 pada bahasan sebelumnya.

Contoh 11:

Berdasarkan data pada Contoh 7, tentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 !

65, 70, 90, 40, 35, 45, 70, 80, 50.

Penyelesaian:

Untuk menentukan Q_1 , Q_2 , dan Q_3 , maka terlebih dahulu kita harus mengurutkannya. Pada contoh tersebut banyak data yang tersedia sebanyak 9 data. Setelah diurutkan datanya menjadi:

35, 40, 45, 50, 65, 70, 70, 80, 90

$$Q_i = \text{nilai pada data ke } - \frac{i(n+1)}{4}$$

$$Q_1 = \text{nilai pada data ke} - \frac{1(9 + 1)}{4}$$

$$Q_1 = \text{nilai pada data ke} - \frac{10}{4}$$

$Q_1 = \text{nilai pada data ke} - 2\frac{1}{2}$ (artinya Q_1 terletak diantara data ke-2 dan data ke-3).

$$\text{Jadi, } Q_1 = \frac{1}{2}(40 + 45) = 42,5$$

$$Q_2 = \text{nilai pada data ke} - \frac{2(9 + 1)}{4}$$

$$Q_2 = \text{nilai pada data ke} - \frac{20}{4}$$

$Q_2 = \text{nilai pada data ke} - 5$ (artinya Q_2 terletak pada data ke-5).

$$\text{Jadi, } Q_2 = \text{median} = 65$$

$$Q_3 = \text{nilai pada data ke} - \frac{3(9 + 1)}{4}$$

$$Q_3 = \text{nilai pada data ke} - \frac{30}{4}$$

$Q_3 = \text{nilai pada data ke} - 7\frac{1}{2}$ (artinya Q_3 terletak diantara data ke-7 dan data ke-8).

$$\text{Jadi, } Q_3 = \frac{1}{2}(70 + 80) = 75$$

Nah, bagaimana untuk data berkelompok? Untuk menentukan Q_2 kita dapat menggunakan rumus median, sedangkan untuk menentukan Q_1 dan Q_3 dapat menggunakan rumus:

$$Q_1 = b + p \left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f} \right)$$

$$Q_3 = b + p \left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f} \right)$$

Keterangan:

Q_i = Kuartil ke- i .

b = Tepi bawah kelas kuartil ke- i .

p = Panjang kelas kuartil ke- i .

f = Frekuensi kelas kuartil ke- i .

F = Jumlah semua frekuensi sebelum kelas kuartil ke- i .

n = Banyak data.

Contoh 12:

Tentukanlah Q_1 dan Q_3 pada data Tabel 3.9!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 3.9 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i	f_{kum}
52 – 58	2	2
59 - 65	16	18
66 - 72	12	30
73 - 79	27	57
80 - 86	10	67
87 - 93	8	75
94 - 100	5	80
Jumlah	80	

Q_1 akan berada pada data ke $\frac{n}{4}$ atau data ke-20 (data ke-20 berada pada kelas interval 66 – 72).

Tepi bawah kelas median (b) = 66 – 0,5 = 65,5.

Panjang kelas (p) = 7 (**mengapa?** Dari 66 – 72 terdapat 7 data).

$$Q_1 = b + p \left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f} \right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 7 \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \times 80 \right) - 18}{12} \right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 7 \left(\frac{2}{12} \right)$$

$$Q_1 = 65,5 + 1,167$$

$$Q_1 = 66,67$$

Q_3 akan berada pada data ke $\frac{3n}{4}$ atau data ke-60 (data ke-60 berada pada kelas interval 80 - 86).

Tepi bawah kelas median (b) = 80 – 0,5 = 79,5.

Panjang kelas (p) = 7 (**mengapa?** Dari 80 – 86 terdapat 7 data).

$$Q_3 = b + p \left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f} \right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 7 \left(\frac{\left(\frac{3}{4} \times 80 \right) - 57}{10} \right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 7 \left(\frac{3}{10} \right)$$

$$Q_3 = 79,5 + 2,1$$

$$Q_3 = 81,6$$

3) Modus

Modus merupakan ukuran pemusatan data untuk menyatakan fenomena yang paling banyak terjadi atau data yang paling sering muncul. Sekumpulan data yang diperoleh memungkinkan memiliki nilai modus yang tidak tunggal.

Contoh 13:

Tentukan modus dari data-data berikut ini: 65, 70, 90, 70, 40, 40, 40, 35, 45, 70, 80, 50!

Penyelesaian:

Setelah diurutkan datanya menjadi: 35, 40, 40, 40, 45, 50, 65, 70, 70, 70, 80, 90, maka kita mengetahui bahwa nilai 40 ada 3 dan nilai 70 ada 3, maka modus (*Mo*) dari data tersebut adalah 40 dan 70.

Bahasan selanjutnya adalah bagaimana menentukan nilai modus jika data yang dimiliki adalah data yang berkelompok. Menentukan modus untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$Mo = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

Keterangan :

Mo = Modus.

b = Tepi bawah kelas modus.

p = Panjang kelas modus.

b_1 = Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas sebelumnya.

b_2 = Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas berikutnya.

Contoh 14:

Tentukanlah modus pada data Tabel 3.9 pada halaman 157!

Penyelesaian:

Data pada Tabel 3.9 adalah sebagai berikut:

Nilai	f_i
52 – 58	2
59 - 65	16
66 - 72	12
73 - 79	27
80 - 86	10
87 - 93	8
94 - 100	5
Jumlah	80

Berdasarkan data tersebut frekuensi yang paling banyak muncul berada pada interval atau kelas 73 – 79.

Tepi bawah kelas modus (b) = $73 - 0,5 = 72,5$

Panjang kelas modus (p) = 7

$b_1 = 27 - 12 = 15$

$b_2 = 27 - 10 = 17$

$$Mo = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

$$Mo = 72,5 + 7 \left(\frac{15}{15 + 17} \right)$$

$$Mo = 72,5 + 7 \left(\frac{15}{32} \right)$$

$$Mo = 72,5 + 3,28$$

$$Mo = 75,78$$

f. **Ukuran Penyebaran Data**

Ukuran penyebaran data merupakan suatu ukuran yang menyatakan seberapa besar penyimpangan nilai-nilai data dari nilai-nilai pusat datanya. Perhatikan contoh data dua kelompok nilai tes berikut ini:

Tabel 3.12

Nilai Kelompok A dan Kelompok B

Kelompok A	70	65	60	60	60	65	70	65	75	60
Kelompok B	90	80	70	30	10	75	75	50	80	90

Catatan: Data fiktif

Dari data di atas apabila kita hitung rerata kelompok A adalah 65, dan rerata kelompok B adalah 65. Rerata kedua kelompok tersebut sama, tetapi jika kita lihat dari penyebaran data pada dua kelompok tersebut dapat dilihat data kelompok A lebih merata daripada data pada kelompok B. Untuk melihat penyebaran data, kita bisa melihat dari nilai range (selang), simpangan baku dan varians.

1) **Range (Interval)**

Range merupakan metode pengukuran paling sederhana yang digunakan untuk mengukur ketersebaran suatu data. Nilai *range* sangat dipengaruhi dengan adanya data atau nilai pencilan (data yang sangat jauh dari data-data yang lain), oleh karena itu *range* bukanlah merupakan ukuran yang baik untuk menunjukkan ketersebaran suatu data. Nilai *range* juga hanya dipengaruhi oleh dua buah data (data terkecil dan data terbesar (data yang lain dapat diabaikan). Sebagai contoh, lihat kembali Tabel 12, berdasarkan data pada Tabel 12, nilai range kelompok A adalah $75 - 60 = 15$, dan nilai range kelompok B adalah $90 - 10 = 80$.

2) **Simpangan Baku**

Simpangan baku merupakan ukuran statistik yang paling sering digunakan untuk mengukur tingkat ketersebaran suatu data. Nilai

simpangan baku menunjukkan seberapa dekat nilai-nilai suatu data dengan nilai reratanya. Simpangan baku biasa dilambangkan dengan s . Menentukan nilai simpangan baku data yang tidak berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Keterangan:

s = Simpangan baku.

x_i = Nilai data ke- i .

$\bar{x}$ = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Menentukan nilai simpangan baku untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Keterangan:

s = Simpangan baku.

x_i = Nilai tengah data pada kelas interval ke- i .

$\bar{x}$ = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Contoh 15:

Tentukan nilai simpangan baku dari data pada Tabel 3.10 halaman 158!

Penyelesaian:

Data Tabel 3.10 dan nilai reratanya adalah sebagai berikut (lihat contoh 2):

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{3055}{35} = 87,29$$

x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
70	2	-17,29	298,94	597,88
75	6	-12,29	151,04	906,24
80	2	-7,29	53,14	106,28
85	7	-2,29	5,24	36,68
90	5	2,71	7,34	36,70
95	8	7,71	59,44	475,52
100	5	12,71	161,54	807,70
Jumlah	35			2967

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2967}{34}}$$

$$s = \sqrt{87,26}$$

$$s = 9,34$$

Contoh 16:

Tentukanlah nilai simpangan baku dari Tabel 3.9 !

Penyelesaian:

Data dari tabel 3.9 adalah sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6017}{80} = 75,21$$

Nilai	f_i	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
52 – 58	2	55	-20,21	408,44	816,88
59 - 65	16	62	-13,21	174,50	2792
66 - 72	12	69	-6,21	38,56	462,72
73 - 79	27	76	0,79	0,62	16,74
80 - 86	10	83	7,79	60,68	606,8
87 - 93	8	90	14,79	218,74	1749,92
94 – 100	5	97	21,79	474,80	2374
Jumlah	80				8819,06

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{8819,06}{79}}$$

$$s = \sqrt{111,63}$$

$$s = 10,57$$

3) Varians

Varians merupakan salah satu ukuran penyebaran data selain range dan simpangan baku. Nilai varians dapat diperoleh dari nilai kuadrat simpangan baku, sehingga varians dilambangkan dengan s^2 . Menentukan nilai varians data yang tidak berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Keterangan:

s^2 = Varians.

x_i = Nilai data ke- i .

$\bar{x}$ = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Menentukan nilai varians untuk data yang berkelompok dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$s^2 = \frac{\sum f(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Keterangan:

s^2 = Varians.

x_i = Nilai tengah data pada kelas interval ke- i .

$\bar{x}$ = Nilai rerata.

n = Banyak data.

Berdasarkan data pada contoh 15 dan contoh 16, tentukanlah varians dari data-data tersebut!

g. Nilai Baku

Nilai baku merupakan sebuah nilai yang menyatakan perbandingan antara selisih nilai data dengan reratanya dibagi simpangan baku data tersebut. Nilai baku merupakan sebuah bentuk perubahan yang dipakai untuk membandingkan dua buah keadaan atau lebih. Nilai baku juga dapat dipakai untuk mengetahui kedudukan suatu objek dibandingkan keadaan yang lebih umum. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut. Nilai baku dilambangkan dengan z , dengan rumus:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Nilai baku dapat bernilai positif dan mungkin juga bernilai negatif.

Contoh 17:

Firman mengikuti tes seleksi olimpiade matematika wilayah Jawa Barat memperoleh nilai 87, dan nilai rerata wilayah Jawa Barat adalah 86 dengan simpangan baku 12. Hary mengikuti tes seleksi yang sama untuk wilayah Sumatera Barat memperoleh nilai 85, dan nilai rerata wilayah Sumatera Barat adalah 83 dengan simpangan baku 10. Jika nilai mereka diurutkan secara nasional, nilai manakah yang lebih baik?

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai yang lebih baik, maka kita harus merubah nilai yang diperoleh menjadi nilai baku.

$$z_{Firman} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{87 - 86}{12} = 0,083$$

$$z_{Hary} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{85 - 83}{10} = 0,2$$

Berdasarkan data tersebut terlihat bahwa z_{Hary} lebih dari z_{Firman} , artinya nilai Firman lebih baik daripada nilai Hary.

h. Kaidah pencacahan

Kaidah pencacahan dapat membantu kita memecahkan masalah untuk menghitung banyaknya cara yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan. Kaidah pencacahan meliputi aturan penjumlahan, aturan pengisian tempat (aturan perkalian), permutasi, dan kombinasi.

1) Aturan Penjumlahan

Perhatikan beberapa contoh berikut ini:

Contoh 18:

Irma akan pergi ke toko kue untuk membeli beberapa jenis kue. Pada toko kue yang didatangi oleh Irma hanya tersedia 7 jenis kue yang dimasak dengan cara dikukus, dan 9 jenis kue yang dimasak dengan cara dipanggang. Berapa kue yang dapat dipilih oleh Irma?

Penyelesaian:

Banyak kue yang dapat dipilih oleh Irma adalah sebanyak $7 + 9 = 16$ pilihan (karena jenis kue yang tersedia tidak saling beririsan).

Contoh 19:

Ani akan pergi berpergian dari kota Semarang ke kota Surabaya menggunakan transportasi umum. Setelah mencari informasi, Ani mencatat untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya dapat menggunakan bis dengan jadwal keberangkatan pukul 08.00, pukul 13.00, dan pukul 18.00, atau dapat juga menggunakan kereta api dengan jadwal keberangkatan pukul 14.30 dan 19.00. Ada berapa banyak cara yang dapat dipilih Ani untuk pergi dari kota Semarang ke kota Surabaya?

Penyelesaian:

Banyak cara yang dapat dipilih Ani adalah $3 + 2 = 5$ cara (*mengapa?*).

Apabila terdapat a_1 benda pada peristiwa atau himpunan pertama, dan a_2 benda pada peristiwa atau himpunan kedua, dan kedua himpunan tidak beririsan, maka banyak cara yang dapat dipilih adalah $a_1 + a_2$.

2) Aturan Pengisian Tempat (Aturan Perkalian)

Perhatikan beberapa contoh berikut ini:

Contoh 20:

Firman berencana membuat kartu-kartu yang bertuliskan bilangan-bilangan untuk kegiatan di sekolah. Kartu-kartu tersebut bertuliskan bilangan puluhan dengan syarat tidak boleh ada angka yang sama. Berapa banyak kartu yang disiapkan oleh Firman?

Penyelesaian:

Kartu-kartu yang dibuat Firman berisikan bilangan puluhan, dengan syarat angkanya tidak boleh sama. Bilangan-bilangan yang dapat dibuat Firman ada pada daftar berikut ini:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	-	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	-	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	-	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	-	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	-	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	-	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	-	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	-	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	-

Apabila dihitung berdasarkan tabel tersebut, maka terdapat 81 bilangan. Secara matematis dapat ditentukan sebagai berikut:

Banyak angka yang mungkin pada angka pertama ada 9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9).

Banyak angka yang mungkin pada bilangan kedua (dengan syarat tidak boleh sama dengan angka pertama) adalah ada 9 (mengapa? Banyak angka yang mungkin pada angka kedua ada 10 angka, tetapi karena tidak boleh ada yang sama, maka banyak angka yang mungkin adalah 9 angka, perhatikan ilustrasi berikut ini: misalkan Firman telah memilih angka 5, maka angka 5 tidak boleh muncul di angka kedua, sehingga banyak angka yang mungkin adalah $10 - 1 = 9$).

Banyak bilangan yang terbentuk adalah $9 \times 9 = 81$.

Contoh 21:

Dewi menerima undangan untuk tampil pada acara pementasan seni SD Sukamakmur. Dewi menyiapkan 4 buah celana yang berwarna hitam, putih, biru, dan coklat. Dewi juga menyiapkan 5 baju yang berwarna merah, hijau, kuning, biru, dan putih, serta menyiapkan 2 buah topi yang berwarna hitam dan biru. Berapa banyak cara Dewi memilih celana, baju, dan topi yang akan dipakainya?

Penyelesaian:

a_1 = kejadian 1 (dalam hal ini banyak celana) = 4

a_2 = kejadian 2 (dalam hal ini baju) = 5

a_3 = kejadian 3 (dalam hal ini topi) = 2

Banyak cara Dewi memilih celana, baju, dan topi adalah:

$a_1 \times a_2 \times a_3 = 4 \times 5 \times 2 = 40$ cara.

Dapatkah Anda mendaftar pasangan celana, baju, topi yang mungkin akan dipakai? Contoh: Dewi akan menggunakan celana hitam, baju merah, dan topi hitam.

Contoh 22:

Kode 5 karakter disusun dengan ketentuan sebagai berikut: karakter pertama berupa angka yang merupakan bilangan genap, karakter kedua berupa huruf hidup, karakter ketiga berupa angka kelipatan tiga, serta karakter keempat dan karakter kelima berupa angka tetapi tidak boleh sama. Banyak kode yang mungkin dibuat adalah

Penyelesaian:

Angka genap	Huruf hidup	Angka kelipatan tiga	Angka	Angka (tidak boleh sama dengan karakter ke-4)
2,4,6,8	a, i, u, e, o	3, 6, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Misal 1 sudah dipilih di karakter 4, maka kemungkinan hanya tinggal 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
$a_1 = 4$	$a_2 = 5$	$a_3 = 3$	$a_4 = 10$	$a_5 = 9$

Banyak kode yang mungkin dibuat adalah:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 4 \times 5 \times 3 \times 10 \times 9 = 5.400 \text{ kode.}$$

Apabila suatu peristiwa pertama dapat dikerjakan dengan a_1 cara yang berbeda, peristiwa kedua dapat dikerjakan dengan a_2 cara yang berbeda dan seterusnya sampai peristiwa ke- n , maka banyaknya cara yang berbeda Misalkan terdapat n tempat yang akan diisi dengan a_1 (banyaknya cara untuk mengisi tempat pertama), a_2 (banyaknya cara untuk mengisi tempat kedua), dan seterusnya hingga a_n (banyaknya cara untuk mengisi tempat ke- n); maka total untuk mengisi tempat tersebut adalah $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

3) Permutasi

Perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 23:

Pada suatu pemilihan ketua kelas dan wakil ketua kelas, terdapat 3 siswa yang mendaftar yaitu Feri, Malik, dan Runa. Berapa banyak kemungkinan pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang akan terpilih?

Penyelesaian:

Siswa yang mendaftar adalah Feri, Malik, dan Runa.

Ketua Kelas	Wakil Ketua Kelas
Feri	Malik
Feri	Runa
Malik	Runa
Malik	Feri
Runa	Feri
Runa	Malik

Perhatikan bahwa Feri – Malik akan berbeda dengan Malik – Feri, mengapa? Karena Feri sebagai ketua kelas berbeda dengan Feri sebagai wakil ketua kelas. Pada kasus ini, **urutan sangatlah diperhatikan**.

Banyak pasangan ketua kelas dan wakil ketua kelas yang mungkin ada 6 pasangan.

Nah, secara matematis, bagaimana menghitungnya? Perhatikan penjelasan berikut ini:

Permutasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek dengan memperhatikan urutannya. Perhitungan banyak susunan atau banyak cara berdasarkan permutasi sangat bergantung pada banyaknya objek yang tersedia dan banyak objek yang akan diambil.

Catatan: Sebelum membahas tentang permutasi, perlu diketahui tentang notasi faktorial. Untuk setiap bilangan bulat positif n , berlaku $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ dan $0! = 1$.

Permutasi semua objek diambil.

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, maka banyak permutasi yang dapat dibentuk dari semua objek adalah:

$${}_nP_n = P(n, n) = n! \text{ cara.}$$

Contoh 24:

Terdapat empat buah bendera yang akan disusun di sebuah ruangan, maka banyak cara menyusun bendera adalah

Penyelesaian:

Banyak bendera = $n = 4$.

Banyak cara menyusun bendera yang mungkin adalah

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ cara.}$$

Permutasi sebagian objek diambil.

Misalkan terdapat n objek yang berbeda, jika k objek diambil dari n objek, maka banyak permutasi yang mungkin adalah:

$${}_nP_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ susunan.}$$

Contoh 25:

Pada sebuah kelas akan diadakan pemilihan kepengurusan kelas yang meliputi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Saat penjurangan, ada 9 siswa yang akan mengikuti pemilihan tersebut. Banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut ada

Penyelesaian:

Banyak siswa = $n = 9$.

Banyak objek = $k = 3$.

Banyak kemungkinan susunan kepengurusan kelas tersebut adalah

$${}_nP_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$${}_9P_3 = P(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 504 \text{ susunan.}$$

Permutasi dengan pengulangan.

Misalkan terdapat n objek dengan n_1 adalah banyak objek pertama yang sama, n_2 adalah banyak objek kedua yang sama,

n_3 adalah banyak objek ketiga yang sama, ..., n_k adalah banyak objek ke- k yang sama; maka banyak permutasi yang dapat dibentuk ada $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}$ susunan.

Contoh 26:

Banyak cara untuk menyusun huruf dari kata MATEMATIKA adalah

Penyelesaian:

Banyak huruf dari MATEMATIKA, $n = 10$.

n_1 = huruf M = 2.

n_2 = huruf A = 3.

n_3 = huruf T = 2.

$$P_{10,2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200 \text{ susunan}$$

Permutasi melingkar.

Misalkan terdapat sejumlah objek yang berbeda, permutasi yang dapat dibentuk dari sejumlah objek itu yang membentuk lingkaran dinamakan permutasi melingkar. Hal yang perlu diperhatikan adalah penetapan terlebih dahulu salah satu objeknya. Penghitungan banyak permutasi melingkar yang dapat dibentuk bergantung pada objek yang tersedia.

Apabila kita mempunyai n objek berbeda, maka banyak permutasi melingkar yang dapat dibentuk adalah $(n - 1)!$ susunan.

Contoh 27:

Ayah, ibu, kakak, dan adik duduk mengelilingi meja bundar. Banyak susunan yang dapat dibuat oleh ayah, ibu, kakak, dan adik adalah

Penyelesaian:

Banyak orang = $n = 4$

Banyak susunan = $(n - 1)! = (4 - 1)! = 3! = 6$ susunan.

4) Kombinasi

Perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 28:

Amar, Dzaky, dan Hendra mengikuti kegiatan seminar yang sama. Ketiga orang tersebut saling berjabat tangan sambil memperkenalkan diri mereka. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi diantara ketiganya?

Penyelesaian:

Jabat tangan yang mungkin adalah: Amar – Dzaky, Amar – Hendra, Dzaky – Hendra. Bagaimana dengan Dzaky – Amar? Jabat tangan Amar – Dzaky dan Dzaky – Amar adalah sama. Pada kasus seperti ini **urutan tidak diperhatikan**.

Banyak jabat tangan yang terjadi adalah 3 jabat tangan.

Secara matematis perhatikan definisi berikut ini:

Kombinasi adalah sebuah susunan dari sekumpulan objek tanpa memperhatikan urutannya. Apabila kita memiliki n objek yang berbeda, maka banyak kombinasi yang dapat dibentuk dari semua objek itu ada satu cara. Misalnya kita memiliki n objek berbeda, apabila kita akan mengambil k objek dari n objek, maka banyak kombinasi yang mungkin ada $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ cara.

Contoh 29:

Pada suatu ruangan terdapat 8 orang dan mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Banyak jabat tangan yang terjadi adalah

Penyelesaian:

$$n = 8$$

$k = 2$ (satu kali jabat tangan melibatkan 2 orang).

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C(8, 2) = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!6!} = 28 \text{ jabat tangan.}$$

i. Peluang

Peluang digunakan untuk melihat kemungkinan terjadinya sebuah kejadian. Sebelum mendefinisikan apa itu peluang, ada beberapa istilah yang harus Anda ketahui:

1. Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan.

Misalkan kita melempar sebuah uang logam. Pada sebuah uang logam terdapat angka (A) dan gambar (G). maka ruang sampel dari percobaan itu adalah {A, G}.

2. Titik sampel adalah anggota dari ruang sampel.

Pada contoh melempar uang logam, titik sampelnya adalah A dan G. Jika A adalah suatu kejadian dengan ruang sampel S, maka peluang kejadian A (ditulis $P(A)$) adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyak cara terjadi kejadian A}}{\text{banyak semua kemungkinan}}$$

Nilai dari sebuah peluang adalah $0 \leq P(A) \leq 1$, sebuah kejadian yang memiliki nilai peluang nol merupakan kejadian yang mustahil, dan sebuah kejadian memiliki nilai peluang satu merupakan kejadian yang pasti.

Contoh 30:

Pada sebuah kelas, guru akan memilih satu orang perwakilan untuk membacakan hasil pengamatannya. Jika pada kelas tersebut terdapat 18 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan, maka berapakah peluang terpilihnya murid laki-laki?

Penyelesaian:

A = Kejadian terpilihnya murid laki-laki.

$$n(A) = 18$$

$$n(S) = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

Jadi, peluang terpilihnya murid laki-laki adalah $\frac{3}{5}$.

4. Tugas Terstruktur

Setelah Anda membaca dan memahami uraian materi dan contoh tersebut, coba Anda selesaikan tugas terstruktur berikut ini:

Kumpulkan data dari diri siswa (tinggi badan, berat badan, dan nilai siswa), kemudian buatlah tabel, diagram, tentukan nilai mean, median, modus, dan simpangan baku dari data-data tersebut!

5. Forum Diskusi

Untuk menambah penguasaan materi Anda, silahkan selesaikan forum diskusi mengenai materi statistika berikut ini:

- a. ***“Pada sebuah sekolah, Kepala Sekolah akan memberikan penghargaan bagi siswa-siswi berprestasi secara akademik pada setiap jenjang kelas. Kandidat untuk siswa Kelas V, dirangkum pada Tabel berikut ini:***

<i>Nama</i>	<i>Kelas</i>	<i>Nilai</i>	<i>Nilai rerata</i>	<i>Simpangan Baku</i>
<i>Arifin</i>	<i>VA</i>	<i>90</i>	<i>87</i>	<i>2,75</i>
<i>Budi</i>	<i>VB</i>	<i>89</i>	<i>88</i>	<i>1,25</i>
<i>Candra</i>	<i>VC</i>	<i>85</i>	<i>82</i>	<i>1,5</i>
<i>Dwi</i>	<i>VD</i>	<i>95</i>	<i>88</i>	<i>6,5</i>

Menurut Anda, bagaimanakah Kepala Sekolah menentukan urutan siswa terbaik pada jenjang kelas V? Bagaimana hasilnya?”

C. PENUTUP

1. Rangkuman

- a. Statistik, Statistika, dan Data
1. Statistik adalah kesimpulan fakta berbentuk bilangan yang disusun dalam bentuk daftar atau tabel yang menggambarkan suatu kejadian.
 2. Statistika juga merupakan suatu metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, perhitungan, penggambaran dan penganalisisan data,

serta penarikan kesimpulan berdasarkan penganalisisan yang dilakukan.

3. Data adalah sejumlah informasi yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah.
4. Menurut sifatnya, data dibagi menjadi data kualitatif dan data kuantitatif.
5. Menurut cara memperolehnya, data dibagi menjadi data primer dan data sekunder.
6. Menurut sumbernya, data dibagi menjadi data internal dan data eksternal.

b. Penyajian Data

1. Penyajian data dapat dilakukan dengan menggunakan tabel atau diagram.
2. Berbagai bentuk tabel diantaranya: baris – kolom, kontingensi, distribusi frekuensi.
3. Berbagai macam diagram diantaranya: diagram lambang, diagram batang, dan diagram lingkaran.

c. Distribusi Frekuensi

1. Distribusi frekuensi adalah suatu susunan data mulai dari data terkecil sampai dengan data terbesar dan membagi banyaknya data menjadi beberapa kelas.
2. Tabel distribusi frekuensi merupakan sebuah tabel yang berisi data yang dikelompokkan ke dalam interval.
3. Langkah membuat tabel distribusi frekuensi: menentukan rentang, menentukan banyak kelas interval, menentukan panjang kelas interval, serta menentukan frekuensi.

d. Distribusi Frekuensi Kumulatif

Tabel distribusi frekuensi kumulatif merupakan tabel distribusi frekuensi, dimana frekuensinya dijumlahkan kelas interval demi kelas interval.

e. Ukuran Pemusatan Data

1. Rerata atau *mean* merupakan salah satu ukuran gejala pusat. *Mean* merupakan wakil kumpulan data.
2. Untuk menentukan rerata dari data tunggal dapat dihitung dengan rumus $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ atau $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.
3. Untuk menentukan rerata dari data kelompok dapat dihitung dengan rumus $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$.
4. Median merupakan nilai tengah dari sekumpulan data yang diurutkan.
5. Untuk menentukan median dapat dihitung dengan rumus:

$$Me = b + p \left(\frac{\frac{1}{2}n - F}{f} \right)$$

6. Modus merupakan gejala dengan frekuensi tertinggi atau yang sering terjadi.
7. Untuk mencari Mo data yang telah dikelompokkan digunakan rumus

$$Mo = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$$

f. Ukuran Penyebaran Data

1. *Range* merupakan metode pengukuran paling sederhana yang digunakan untuk mengukur ketersebaran suatu data. *Range* merupakan selisih dari data terbesar dan data terkecil.
2. Simpangan baku merupakan ukuran statistik untuk mengukur tingkat ketersebaran suatu data. Nilai simpangan baku menunjukkan seberapa dekat nilai-nilai suatu data dengan nilai reratanya.
3. Nilai varians dapat diperoleh dari nilai kuadrat simpangan baku.

g. Nilai baku

Nilai baku merupakan sebuah nilai yang menyatakan perbandingan antara selisih nilai data dengan reratanya dibagi simpangan baku data tersebut.

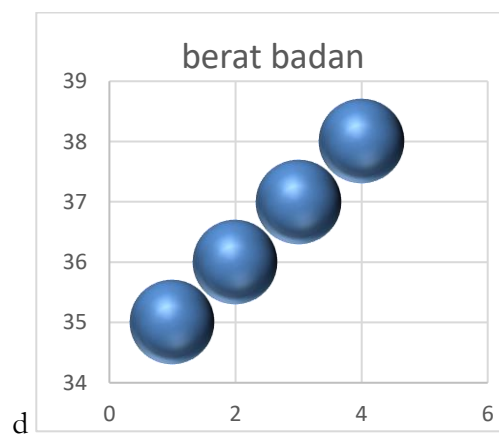
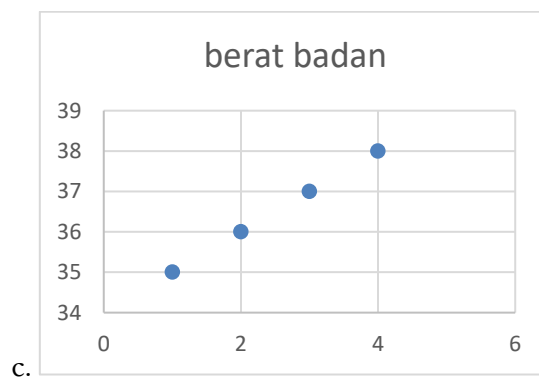
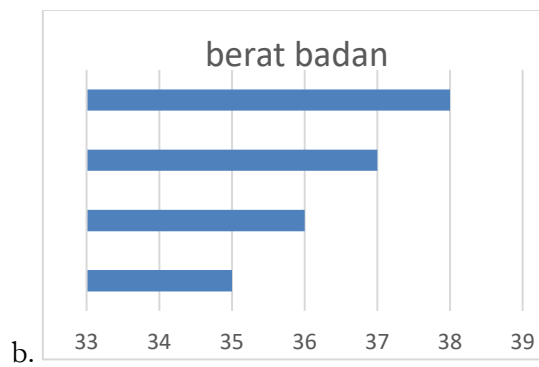
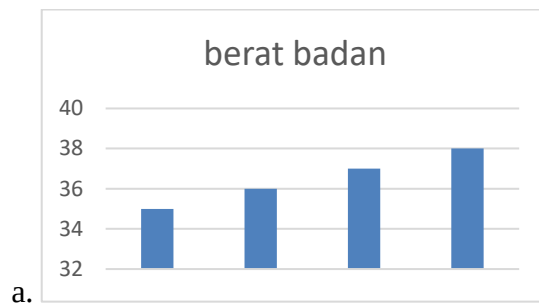
2. Tes formatif

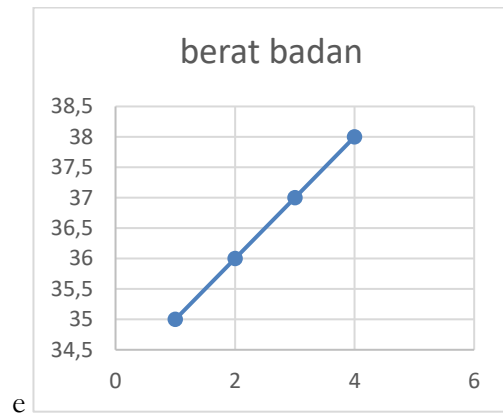
1. Banyak siswa pada suatu kelas adalah 40 siswa. Nilai rerata tes suatu mata pelajaran dari 35 siswa adalah 7,2. Kemudian lima siswa yang lain ikut tes susulan. Jika nilai rerata tes seluruh siswa sekarang menjadi 7,15 maka nilai rerata dari lima siswa yang ikut tes susulan adalah
 - a. 8,7
 - b. 7,9
 - c. 6,8
 - d. 6,4
 - e. 5,9
2. Data nilai seluruh siswa adalah sebagai berikut, siswa mendapat nilai 6 sebanyak 5 siswa, nilai 7 sebanyak 19 siswa, nilai 8 sebanyak 5 siswa, nilai 9 sebanyak 10 siswa dan nilai 10 sebanyak 6 siswa. Median dari kelompok siswa tersebut adalah
 - a. 9
 - b. 6
 - c. 7
 - d. 8
 - e. 10
3. Terdapat nilai siswa sebagai berikut: 92, 96, 80, 90 dan 94 (sebagai kelompok pertama). Apabila data pencilan kita abaikan (sebagai kelompok kedua), manakah diantara pernyataan berikut ini yang benar:
 - a. Median kedua kelompok tersebut sama
 - b. Median kelompok pertama lebih kecil dari kelompok kedua
 - c. Rata-rata kedua kelompok tidak berubah
 - d. Rata-rata kelompok kedua lebih besar
 - e. Rata-rata kelompok pertama lebih besar
4. Perhatikan data berikut ini! Nilai rerata hasil ulangan Matematika pada tabel di bawah ini adalah

Nilai	f
41 – 50	3

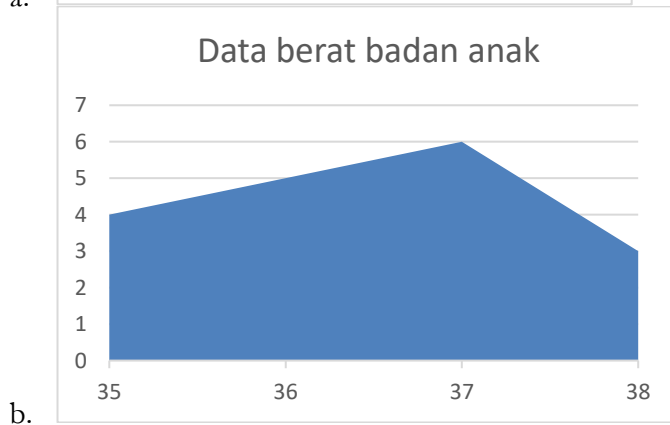
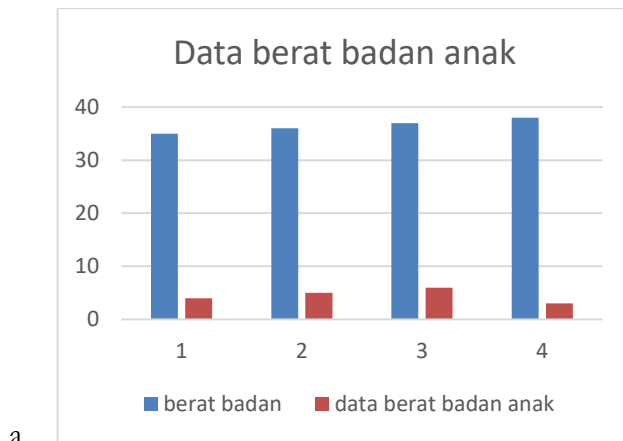
51 – 60	6
61 – 70	12
71 – 80	8
81 – 90	7
91 – 100	4

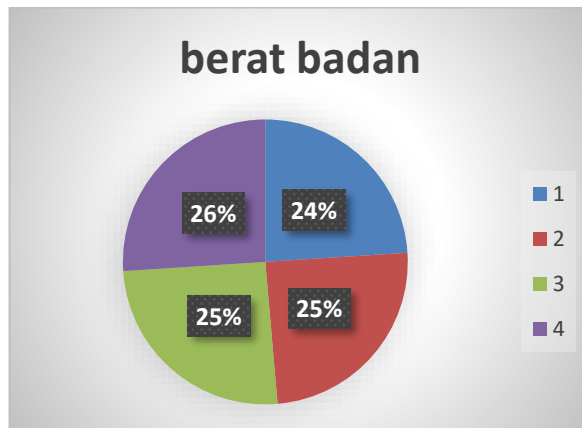
- a. 76
 - b. 75
 - c. 73
 - d. 72
 - e. 71
5. Pada sebuah tes matematika, diketahui nilai rerata kelas adalah 58. Jika rerata nilai matematika untuk siswa pria adalah 65 dan untuk siswa perempuannya adalah 54, perbandingan jumlah siswa pria dan perempuan pada kelas itu adalah
- a. 11 : 7
 - b. 4 : 7
 - c. 4 : 11
 - d. 11 : 4
 - e. 7 : 4
6. Dari angka 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 akan dibuat bilangan dari 3 angka. Banyaknya bilangan 3 angka berbeda lebih besar dari 200 adalah
- a. 288
 - b. 336
 - c. 384
 - d. 392
 - e. 512
7. Apabila saat usia 7 tahun berat badannya adalah 35kg, Usia 8 tahun berat badannya adalah 37kg, Usia 9 tahun berat badannya adalah 38kg, dan pada usia 10 tahun berat badannya adalah 37kg.
- Diagram yang menggambarkan pertumbuhan berat badan anak tersebut adalah



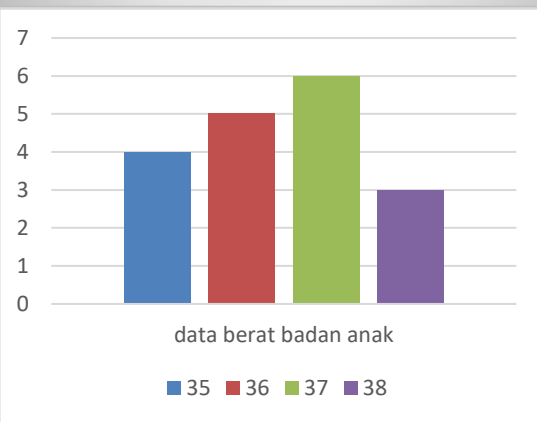


8. Setelah kegiatan selesai, ternyata 4 anak memiliki berat badan 35kg, 5 anak berat badan 36 kg, 6 anak berat badan 37 kg, dan 3 anak berat badannya 38kg. Diagram yang lebih tepat untuk menggambarkan data tersebut adalah

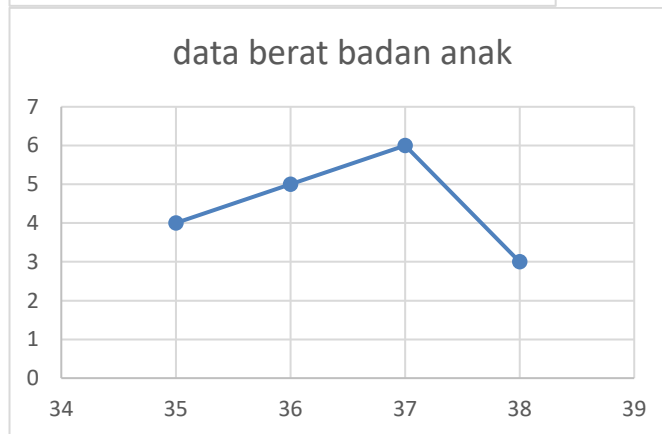




c.



d.

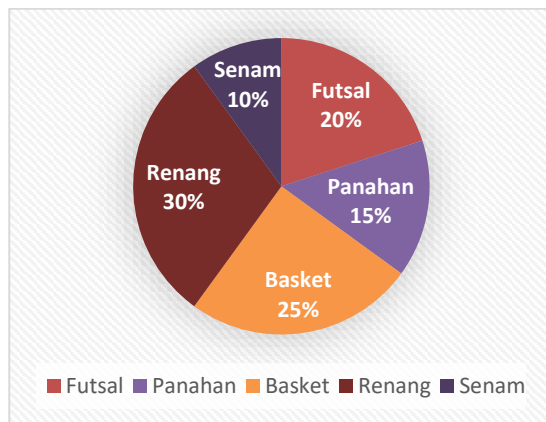


e.

9. Sebuah bank akan mencetak nomor antrian nasabah yang terdiri dari 3 angka. Jika nomor antrian tersebut tidak memuat angka yang sama yang dibentuk dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9, banyak pilihan nomor antrian yang dapat dibuat adalah

- 720
- 840
- 900
- 910

e. 1000



10.

Perhatikan diagram di atas. Berdasarkan data tersebut, pernyataan berikut yang benar adalah

- a. Apabila banyak siswa yang menyukai futsal adalah 40 maka yang menyukai panahan ada 35 orang.
- b. Apabila banyak siswa yang menyukai renang adalah 60 orang, maka yang menyukai futsal ada 30 orang.
- c. Apabila banyak siswa yang menyukai senam adalah 20 orang, maka yang menyukai basket ada 45 orang.
- d. Apabila banyak yang menyukai basket 50 orang, maka yang menyukai panahan ada 30 orang
- e. Apabila yang menyukai panahan 30 orang maka yang menyukai senam ada 15 orang

DAFTAR PUSTAKA

- Bennet, A., Burton, L., Nelson, L. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers*. New York: Mc Graw Hill.
- Fitriani, A. D., (2009). *Statistika (Modul PPG)*. Tidak Diterbitkan.
- Musser, G., Burger, W., Peterson, B. (2011). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach (Ninth Edition)*. New York: John Willey & Sons.
- Prabawanto, S., Mujono. (2006). *Statistika dan Peluang*. Bandung: UPI Press.
- Russeffendi. (1998). *Statistika Dasar untuk Penelitian*. Bandung: IKIP Bandung Press.
- Russeffendi. (2006). *Pengantar kepada Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Sobel, Max., Maletsky, Evan . (1999). *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, And Strategies*. London: Pearson-Viacom Company.
- Walle, John. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics*. Virginia: Pearson Prentice Hall.



DAR2/Profesional/027/2/2022

PENDALAMAN MATERI MATEMATIKA

MODUL 2

KEGIATAN BELAJAR 4

KAPITA SELEKTA MATEMATIKA

Nama Penulis:

Andhin Dyas Fitriani, M.Pd

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISTEK DAN
TEKNOLOGI**

2022

A. PENDAHULUAN

1. Deskripsi Singkat

Kegiatan belajar matematika disusun dengan tujuan untuk memberikan pengetahuan dan wawasan Saudara terkait materi-materi sekolah menengah yang dirangkum pada kegiatan belajar kapita selekta. Kegiatan belajar ini menyajikan bahasan mengenai konsep aljabar dan logika matematika. Secara rinci kegiatan belajar terdiri dari 5 topik, yaitu menyajikan tentang:

- a. Logika matematika.
- b. Pola bilangan dan deret bilangan.
- c. Persamaan linear, pertidaksamaan linear dan grafik fungsi linear.
- d. Persamaan kuadrat, pertidaksamaan kuadrat dan grafik fungsi kuadrat.
- e. Trigonometri

Kegiatan belajar ini disusun secara cermat sesuai dengan isi Undang-Undang Nomor 14 Tahun 2005 tentang Guru dan Dosen, pada Pasal 10 ayat (1) menyatakan bahwa "Kompetensi guru sebagaimana dimaksud dalam Pasal 8 meliputi kompetensi pedagogik, kompetensi kepribadian, kompetensi sosial, dan kompetensi profesional". Guru harus mengembangkan kompetensi profesionalnya, sehingga diharapkan guru tidak hanya menguasai materi yang akan diajarkan saja tetapi juga materi esensial lain dalam mata pelajaran matematika.

2. Relevansi

Kegiatan belajar ini selain berisi materi utama, juga dilengkapi dengan materi penunjang yang dapat dipelajari untuk lebih memperkuat konsep dan pemahaman mengenai materi esensial matematika yang berupa video, dan ppt. Selain itu juga dilengkapi dengan *link* rujukan yang dapat dipelajari mengenai konsep kapita selekta.

Setelah mempelajari modul pada materi utama serta materi penunjang, peserta diharapkan mampu:

- a. Menarik kesimpulan matematis dengan menggunakan penalaran logis.

- b. Menentukan rumus dari suatu pola bilangan dan deret bilangan.
- c. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan linear dan persamaan kuadrat.
- d. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi linear dan kuadrat.
- e. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan trigonometri.

3. Petunjuk Belajar

Untuk membantu Anda dalam memahami modul ini alangkah lebih baik diperhatikan beberapa petunjuk belajar berikut ini:

- a. Bacalah dengan cermat uraian-urien penting yang terdapat dalam modul ini sampai Anda memahami secara tuntas tentang apa, untuk apa, dan bagaimana mempelajari modul ini.
- b. Temukanlah kata-kata kunci dari kegiatan belajar ini. Alangkah lebih baik apabila Anda mencatat dan meringkas hal-hal penting tersebut.
- c. Pahami modul ini melalui pemahaman dan pengalaman sendiri serta diskusikanlah dengan dengan rekan atau instruktur Anda.
- d. Bacalah dan pelajaryl sumber-sumber lain yang relevan. Anda dapat menemukan bacaan dari berbagai sumber, termasuk dari internet.
- e. Mantapkanlah pemahaman Anda melalui pengerjaan forum diskusi dan tes formatif yang tersedia dalam modul ini dengan baik. Kemudian, nilai sendiri tingkat pencapaian Anda dengan membandingkan jawaban yang telah Anda buat dengan kunci jawaban tes formatif yang terdapat pada akhir modul.
- f. Diskusikanlah apa yang telah dipelajari, termasuk hal-hal yang dianggap masih sulit, dengan teman-teman Anda.

B. INTI

1. Capaian Pembelajaran

- a. Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi logika, pola bilangan, persamaan linear, persamaan kuadrat dan grafik fungsi polinomial.

- b. Menguasai konsep teoretis materi pelajaran matematika secara mendalam.

2. Sub Capaian Pembelajaran

- a. Menarik kesimpulan matematis dengan menggunakan penalaran logis.
- b. Menentukan rumus dari suatu pola bilangan dan deret bilangan.
- c. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan linear dan persamaan kuadrat.
- d. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi linear dan kuadrat.
- e. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan trigonometri.

3. Uraian Materi dan Contoh

a. Logika Matematika

1) Pernyataan

Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran benar atau salah, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan. Pernyataan biasa dilambangkan dengan $p, q, r, \dots$

Contoh pernyataan:

p : Herman adalah siswa sekolah dasar kelas VI.

s : $56-19 = 35$.

Adapun contoh bukan pernyataan:

1. Apakah hari ini akan hujan?

2. $9x - 5 = 4x + 2$

Pernyataan dikelompokkan menjadi 2, yaitu pernyataan tunggal dan pernyataan majemuk. Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya. Pernyataan majemuk merupakan kalimat baru yang diperoleh dari berbagai penggabungan pernyataan tunggal.

Suatu pernyataan hanya bisa bernilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak keduanya dalam waktu yang bersamaan. Kebenaran atau kesalahan

dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p dilambangkan dengan $\tau(p)$.

2) Operasi Uner

Misalkan terdapat sebuah pernyataan sebagai berikut:

p : hari ini saya akan pergi ke sekolah.

Namun, karena misalkan saya sakit, maka saya tidak pergi ke sekolah. Pernyataan yang kedua kita sebut sebagai ingkaran dari pernyataan yang pertama. Sebuah operasi yang merupakan lawan dari suatu pernyataan kita sebut sebagai operasi uner. Operasi uner disebut juga dengan operasi negasi atau ingkaran. Operasi negasi merupakan operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur. Operasi negasi biasa dilambangkan dengan $\sim$. Nilai kebenaran negasi sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataannya.

p	$\sim p$
B	S

3) Operasi Biner

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur. Operasi biner berkenaan dengan dua pernyataan. Ada 4 macam operasi biner yang akan dipelajari:

a) Operasi konjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal dihubungkan dengan kata “dan” disebut konjungsi. Operasi konjungsi dilambangkan dengan “ $\wedge$ ”. Sebuah konjungsi benar jika konjung-konjungnya benar, tetapi salah jika salah satu atau kedua-duanya salah.

Tabel kebenaran untuk operasi konjungsi adalah sebagai berikut:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh:

p : 4 adalah bilangan genap.

q : 4 habis dibagi oleh 2.

$p \wedge q$: 4 adalah bilangan genap dan 4 habis dibagi oleh 2.

b) Operasi disjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata “atau” disebut disjungsi. Operasi disjungsi dilambangkan dengan “ $\vee$ ”. Sebuah disjungsi inklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar atau kedua-duanya, dan sebuah disjungsi eksklusif benar jika paling sedikit satu disjungnya benar tetapi tidak kedua-duanya. Tabel kebenaran untuk operasi disjungsi (dalam hal ini adalah disjungsi inklusif) adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh:

p : Ani akan membawa buku gambar.

q : Ani akan membawa buku tulis.

$p \vee q$: Ani akan membawa buku gambar atau buku tulis.

c) Operasi implikasi

Pernyataan implikasi atau *conditional statement* atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “jika p maka q ” dinyatakan dengan $p \rightarrow q$ atau $p \supset q$, dimana p disebut “anteseden” dan q disebut konsekuensi. Suatu pernyataan implikasi hanya salah jika antesedennya benar dan konsekuennya salah, dalam kemungkinan yang lain pernyataan implikasi itu adalah benar. Tabel kebenaran untuk operasi implikasi adalah sebagai berikut:

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh:

p : Hari ini cuaca cerah

q : Anton pergi ke sekolah

$p \rightarrow q$: Jika hari ini cuaca cerah maka Anton pergi ke sekolah.

d) Operasi biimplikasi

Pernyataan biimplikasi atau *biconditional statement* atau pernyataan bersyarat merupakan pernyataan majemuk yang berbentuk “p jika dan hanya jika q” dinyatakan dengan $p \leftrightarrow q$. Suatu pernyataan biimplikasi benar jika nilai kebenaran p sama dengan nilai kebenaran q. Tabel kebenaran untuk operasi biimplikasi adalah sebagai berikut:

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh:

p : 3 adalah bilangan ganjil.

q : 3 tidak habis dibagi dua.

$p \leftrightarrow q$: 3 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika maka 3 tidak habis dibagi 2.

4) Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi

Perhatikan tabel kebenaran berikut ini:

P	$\sim p$	$p \vee \sim p$
B	S	B
S	B	B

Apabila dilihat dari tabel tersebut, nilai kebenaran dari $p \vee \sim p$ semuanya bernilai *benar*. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya *benar* tanpa

memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan **tautologi**.

Untuk lebih jelasnya Anda dapat membuktikan nilai kebenaran dari $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ memiliki nilai kebenaran semuanya *benar*. Pernyataan tersebut juga termasuk **tautology**.

Sebaliknya pada saat kita menentukan nilai kebenaran dari $\sim [(\sim p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow \sim q)] \wedge r$, nilai kebenaran pernyataan tersebut semuanya *salah*. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya *salah* tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan **kontradiksi**. Adapun **kontingensi** merupakan pernyataan yang nilai kebenarannya merupakan kumpulan dari *benar* dan *salah* di luar tautologi dan kontradiksi.

5) Konvers, Invers, dan Kontrapositif

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \rightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \rightarrow q$ dinamakan implikasi logis.

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi $p \leftrightarrow q$ merupakan suatu tautologi, maka $p \leftrightarrow q$ dinamakan ekuivalen logis.

Perhatikan pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$) berikut ini:

Jika hari ini hujan maka saya berada di rumah.

Kemudian perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini:

- a) Jika saya berada di rumah maka hari ini hujan. ($q \rightarrow p$)
- b) Jika hari ini tidak hujan maka saya tidak berada di rumah.
($\sim p \rightarrow \sim q$)
- c) Jika saya tidak berada di rumah maka hari ini tidak hujan.
($\sim q \rightarrow \sim p$)

Pernyataan (a) dinamakan **konvers**, pernyataan (b) dinamakan **invers**, dan pernyataan (c) dinamakan **kontrapositif**.

Dari pernyataan tersebut, diperoleh pernyataan-pernyataan yang saling ekuivalen (nilai kebenaran dari dua pernyataan tersebut sama), yaitu:

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

b) $(q \rightarrow p) \equiv (\sim p \rightarrow \sim q)$

Contoh:

Tentukan konvers, invers, dan kontrapositif dari pernyataan berikut ini:

Jika $a > 0, a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 > 0, a \in \mathbb{Z}$.

Penyelesaian:

Dari pernyataan tersebut,

$p: a > 0, a \in \mathbb{Z}$.

$q: a^2 > 0, a \in \mathbb{Z}$.

$\sim p: a \leq 0, a \in \mathbb{Z}$.

$\sim q: a^2 \leq 0, a \in \mathbb{Z}$.

Konvers:

Jika $a^2 > 0, a \in \mathbb{Z}$ maka $a > 0, a \in \mathbb{Z}$.

Invers:

Jika $a \leq 0, a \in \mathbb{Z}$ maka $a^2 \leq 0, a \in \mathbb{Z}$.

Kontrapositif:

Jika $a^2 \leq 0, a \in \mathbb{Z}$ maka $a \leq 0, a \in \mathbb{Z}$.

6) Penarikan Kesimpulan

Argumen adalah serangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai ungkapan pernyataan penarikan kesimpulan. Argumen terdiri dari pernyataan-pernyataan yang terdiri dari dua kelompok, yaitu kelompok premis-premis dan kelompok konklusi.

Contoh:

(1) Jika Rahmi rajin belajar maka Rahmi akan siap menghadapi ujian.

(2) Rahmi tidak siap menghadapi ujian.

(3) Jadi, Rahmi tidak rajin belajar.

Pernyataan no (1) dan (2) dinamakan premis-premis, dan pernyataan no (3) dinamakan konklusi.

Dalam logika dikenal beberapa cara dalam pengambilan kesimpulan, yaitu:

a) Modus Ponens

Modus ponens adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q \text{ atau } [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q.$$

Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1

p premis 2

$\therefore q$ kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini:

(1) Jika hari ini hujan, maka Andi berada di rumah

(2) Jika Andi berada di rumah, maka Andi akan tidur

(3) Hari ini hujan

Penyelesaian:

Dari pernyataan-pernyataan tersebut:

p : Hari ini hujan.

q : Andi berada di rumah.

r : Andi akan tidur

Dari pernyataan (1) dan (3) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika hari ini hujan maka Andi berada di rumah. (1)

p Hari ini hujan. (3)

$\therefore q$ Andi berada di rumah (4)

Pernyataan (4) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (2) belum kita gunakan.

Dari pernyataan (2) dan (4) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Andi berada di rumah maka Andi akan tidur. (2)

q Andi berada di rumah. (4)

$\therefore r$ Andi akan tidur (5)

Pernyataan (5) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan.

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Andi akan tidur.

d. Modus Tolen

Modus Tolen adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p \text{ atau } [\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p.$$

Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1

$\sim q$ premis 2

$\therefore \sim p$ kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan atau konklusi dari premis-premis berikut ini:

(1) Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian.

(2) Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah.

(3) Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

(4) Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

p : Ani rajin belajar.

$\sim p$: Ani tidak rajin belajar.

q : Ani lulus ujian.

r : Ani diberi hadiah oleh Ayah.

$\sim r$: Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah.

s : Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

Dari pernyataan atau premis (2) dan (4) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$q \rightarrow r$ Jika Ani lulus ujian maka Ani diberi hadiah oleh Ayah. (2)

$\sim r$ Ani tidak diberi hadiah oleh Ayah. (4)

$\therefore \sim q$ Ani tidak lulus ujian (5)

Pernyataan (5) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (1) dan (3) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (1) dan (5) dengan menggunakan modus tollens diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Ani rajin belajar maka Ani lulus ujian. (1)

$\sim q$ Ani tidak lulus ujian. (5)

$\therefore \sim p$ Ani tidak rajin belajar (6)

Pernyataan (6) masih belum merupakan hasil kesimpulan karena pernyataan atau premis (3) belum kita gunakan.

Dari pernyataan atau premis (3) dan (6) dengan menggunakan modus ponens diperoleh:

$\sim p \rightarrow s$ Jika Ani tidak rajin belajar maka Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan. (3)

$\sim p$ Ani tidak rajin belajar. (5)

$\therefore s$ Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan (7)

Pernyataan (7) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan.

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Ani memperoleh hasil yang kurang memuaskan.

e. Silogisme

Silogisme adalah penarikan kesimpulan berdasarkan prinsip:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

Argumen tersebut ditulis sebagai berikut:

$p \rightarrow q$ premis 1

$q \rightarrow r$ premis 2

$\therefore p \rightarrow r$ kesimpulan

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari premis-premis di bawah ini:

- (1) Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya.
- (2) Jika Intan pergi ke Surabaya maka Intan menginap di rumah Sandra.
- (3) Jika Intan tidak bertemu Kiki maka Intan tidak menginap di rumah Sandra.

Penyelesaian:

Dari premis-premis tersebut:

p : Pak Herman pergi ke Jakarta.

q : Intan akan pergi ke Surabaya.

r : Intan menginap di rumah Sandra.

$\sim r$: Intan tidak menginap di rumah Sandra.

$\sim s$: Intan tidak bertemu Kiki.

Dari pernyataan (1) dan (2) menggunakan silogisme diperoleh:

$p \rightarrow q$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan akan pergi ke Surabaya. (1)

$q \rightarrow r$ Jika Intan pergi ke Surabaya maka Intan menginap di rumah Sandra. (2)

$\therefore p \rightarrow r$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra. (4)

Pernyataan (4) merupakan pernyataan baru hasil kesimpulan sementara. Mengapa sementara? Karena pernyataan atau premis (3) belum kita gunakan.

Sekarang perhatikan premis (3) dan (4) yang berbentuk:

$\sim s \rightarrow \sim r$ (3)

$p \rightarrow r$ (4)

Kedua pernyataan tersebut tidak dapat kita gunakan dengan silogisme, maka kita harus merubah pernyataan (3) ke bentuk ekuivalennya. Bentuk ekuivalen dari pernyataan (3) adalah $r \rightarrow s$.

Pernyataan (4) dan bentuk ekuivalen pernyataan (3) menggunakan silogisme diperoleh:

$p \rightarrow r$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan menginap di rumah Sandra. (4)

$r \rightarrow s$ Jika Intan menginap di rumah Sandra maka Intan bertemu Kiki. (1)

$\therefore p \rightarrow s$ Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki. (5)

Pernyataan (5) merupakan kesimpulan akhir dari premis-premis yang tersedia, karena semua premis sudah kita gunakan untuk menarik sebuah kesimpulan.

Jadi, kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah Jika Pak Herman pergi ke Jakarta maka Intan bertemu Kiki.

Selain tiga aturan penarikan kesimpulan di atas, ada beberapa aturan penarikan kesimpulan yang lain dengan menggunakan kata kunci “semua” ataupun “beberapa”. Aturan penarikan kesimpulan yang melibatkan kata kunci tersebut antara lain:

(1) Semua A adalah B.

Semua C adalah A.

Jadi semua C adalah B.

(2) Beberapa A adalah bukan B.

Semua A adalah C.

Jadi beberapa C adalah bukan B.

(3) Semua A adalah B.

Beberapa C adalah bukan B.

Jadi, beberapa C adalah bukan A.

(4) Semua A adalah B.

Beberapa C adalah A.

Jadi, beberapa C adalah B.

(5) Tak ada A yang merupakan B.

Semua A adalah C.

Jadi, beberapa C adalah bukan B.

Contoh:

Tentukan kesimpulan dari:

- (1) Semua segiempat adalah poligon.

Semua persegi panjang adalah segiempat.

Kesimpulan: Semua persegi panjang adalah polygon.

- (2) Beberapa guru adalah bukan sarjana pendidikan.

Semua guru adalah pendidik.

Kesimpulan: Beberapa pendidik adalah bukan sarjana pendidikan.

Coba Anda cari contoh yang lain dan tentukan kesimpulannya.

b. Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

Sebelum membahas mengenai pola bilangan, terlebih dahulu akan dimulai dengan membahas sedikit mengenai penalaran. Dalam matematika, penalaran dibagi menjadi penalaran deduktif dan penalaran induktif.

1) Penalaran deduktif

Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum. Dasar penalaran deduktif adalah kebenaran suatu pernyataan haruslah berdasarkan pada kebenaran pernyataan lain.

Contoh:

Buktikanlah: Jika m dan n adalah bilangan-bilangan genap, maka $m + n$ adalah bilangan genap.

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan tersebut, maka kita akan menggunakan proses berpikir deduktif. Artinya membuktikan pernyataan tersebut haruslah berdasarkan kebenaran ataupun definisi yang sudah jelas kebenarannya, tanpa menggunakan contoh.

Misalkan m dan n adalah sebarang bilangan genap, terdapat r dan s sedemikian hingga $m = 2r$ dan $n = 2s$ (definisi bilangan genap).

$$m + n = 2 \times r + 2 \times s$$

$$m + n = 2 \times (r + s) \quad (\text{sifat distributif, sifat tertutup})$$

Karena $r + s$ adalah suatu bilangan bulat, maka berdasarkan definisi bilangan genap diperoleh bahwa $m + n$ adalah bilangan genap.

2) Penalaran induktif

Penalaran induktif atau berpikir induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif pada prinsipnya adalah menyelesaikan persoalan matematika tanpa menggunakan rumus (dalil), melainkan dimulai dengan memperhatikan data/soal. Dari data tersebut diproses sehingga berbentuk kerangka/pola dasar tertentu yang kita cari sendiri, sedemikian rupa dapat ditarik sebuah kesimpulan.

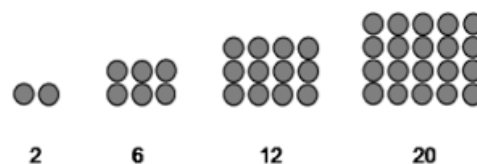
Penalaran induktif dapat meliputi pengenalan pola, dugaan, dan pembentukan generalisasi.

3) Pola Bilangan, Barisan dan Deret Bilangan

Berikut akan disajikan beberapa contoh pola bilangan, antara lain:

a) Pola persegi panjang

Pola persegi panjang digambarkan dengan pola seperti berikut ini:



Banyak titik pada pola persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, ... Untuk menentukan rumus suku ke- n dari banyak titik pada pola persegi panjang, maka Anda harus perhatikan pola suku ke- n pada titik-titik di atas. Perhatikan tabel di bawah ini untuk membantu kita membuat dugaan rumus suku ke- n .

Suku ke- n	Banyak titik (vertikal)	Banyak titik (horizontal)	Banyak titik seluruhnya
1	1	2	2
2	2	3	6
3	3		12

4			20
n	n	$n + 1$	$n(n + 1)$

Rumus pola bilangan persegi panjang adalah:

$$U_n = n(n + 1), n \in \text{bilangan asli.}$$

Catatan: $U_n =$ suku ke- n .

Contoh:

Tentukanlah banyak titik pola persegi panjang pada suku ke-15!

Penyelesaian:

Banyak titik pada suku ke-15 adalah U_{15} .

$$U_n = n(n + 1)$$

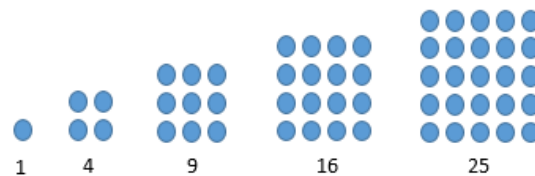
$$U_{15} = 15(15 + 1)$$

$$U_{15} = 240.$$

Jadi banyak titik pada suku ke-15 adalah 240.

b) Pola persegi

Pola persegi digambarkan dengan pola seperti berikut ini:



Pola bilangan persegi terdiri dari 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...

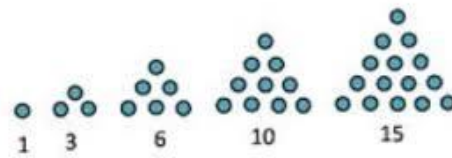
Melalui proses yang sama seperti menemukan dugaan rumus pola persegi panjang, coba Anda lakukan proses menemukan pola dugaan untuk pola persegi! Apakah rumus yang Anda peroleh adalah n^2 ?

Rumus pola bilangan persegi adalah $U_n = n^2, n \in \text{bilangan asli.}$

Catatan: $U_n =$ suku ke- n .

c) Pola segitiga

Pola segitiga digambarkan sebagai berikut:



Pola bilangan segitiga terdiri dari 1, 3, 6, 10, 15, ...

Setelah memperhatikan bilangan yang termasuk pada pola bilangan segitiga, dapatkah Anda membuat dugaan rumus pola bilangan segitiga melalui pola bilangan persegi panjang? Jika Anda belum menemukannya, maka lakukan langkah seperti menemukan rumus persegi panjang yang telah dicontohkan pada bagian a). Apakah rumus yang Anda peroleh adalah $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rumus pola bilangan segitiga adalah

$$U_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad n \in \text{bilangan asli.}$$

Catatan: U_n = suku ke- n .

d) Pola bilangan Fibonacci

Pola bilangan Fibonacci ditemukan oleh matematikawan Italia yang bernama Leonardo da Pisa. Perhatikan contoh pola bilangan Fibonacci berikut ini: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Informasi apa yang dapat Anda peroleh dari bilangan-bilangan tersebut? Informasi yang Anda peroleh dari barisan bilangan tersebut adalah suku ke-3 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-1 dan suku ke-2, suku ke-4 merupakan hasil penjumlahan dari suku ke-2 dan suku ke-3, dan seterusnya. Dengan kata lain pada pola bilangan Fibonacci sebuah suku tertentu merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya, dapat ditulis dengan: $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$.

Catatan: U_n = suku ke- n .

Dapatkah Anda membuat bilangan-bilangan yang mengikuti pola bilangan Fibonacci?

e) Barisan dan Deret Aritmatika

Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini:

(a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

(b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

(c) 11, 14, 17, 20, 23, ...

(d) 58, 54, 50, 46, 42, 38, ...

Apabila kita perhatikan, pada barisan-barisan tersebut, selisih dua buah bilangan pada setiap barisan adalah tetap (*coba Anda identifikasi hal ini!*). Barisan yang memiliki karakteristik seperti ini dinamakan **barisan aritmatika**. Selisih antara dua suku pada barisan aritmatika dinamakan **beda** (b).

Sebuah barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika jika untuk setiap n berlaku $U_n - U_{n-1} = b$, b adalah sebuah konstanta. Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.

Misalkan kita memiliki suku pertama dari sebuah barisan aritmatika adalah a dan bedanya adalah b , maka akan diperoleh:

$$U_1 = a$$

$$U_2 - U_1 = b \leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b,$$

dan seterusnya, sehingga suku-suku barisan aritmatika dapat disusun sebagai berikut: $a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$

U_1	U_2	U_3	U_4	...	U_n
a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b$	...	$a + (n - 1)b$

Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b,$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n

a = suku pertama

b = beda

Perhatikan penjumlahan bilangan-bilangan berikut ini:

$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$ Berapakah hasil penjumlahan bilangan-bilangan tersebut?

Kita dapat melakukannya seperti salah satu matematikawan Carl Frederick Gauss (1777 – 1855), dengan cara berikut ini:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = S_{100}$$

$$\underline{100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = S_{100} \quad +}$$

$$101 + 1010 + 101 + \dots + 101 + 101 = 2 \times S_{100}$$

$$100 \times 101 = 2 \times S_{100}$$

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$S_{100} = 5050$$

Bentuk $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$ adalah suatu contoh deret aritmatika. Deret aritmatika adalah jumlah suku-suku barisan aritmatika, dapat ditulis dengan:

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan aritmatika.

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} + U_n, \text{ atau}$$

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b].$$

Menemukan rumus umum jumlah suku ke- n adalah sebagai berikut:

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (n - 1)b]$$

$$\underline{S_n = [a + (n - 1)b] + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a \quad +}$$

$$2S_n = [2a + (n - 1)b] + \dots + [2a + (n - 1)b]$$

$$2S_n = n[2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

Contoh:

Tentukanlah jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6!

Penyelesaian:

Sebelum menentukan jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6, maka kita akan menentukan terlebih dahulu bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6.

Bilangan asli antara 200 dan 300 yang habis dibagi 6 adalah:

204, 210, 216, ..., 294.

Berdasarkan barisan tersebut:

$$a = 204$$

$$b = 6$$

$$U_n = 294$$

Sebelum menentukan jumlah, maka tentukan terlebih dahulu banyak suku pada barisan tersebut atau kita akan mencari n .

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$294 = 204 + (n - 1)6$$

$$90 = (n - 1)6$$

$$(n - 1) = 15$$

$$n = 16$$

Jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6,

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

$$S_{16} = \frac{1}{2}16(204 + 294)$$

$$S_{16} = 8 \times 498$$

$$S_{16} = 3.984.$$

Jadi jumlah semua bilangan asli antara 200 dan 299 yang habis dibagi 6 adalah 3.984.

f. Barisan dan Deret Geometri

Perhatikan beberapa pola barisan berikut ini:

(a) 1, 2, 4, 8, 16, ...

(b) 64, -16, 4, -1, ...

(c) 5, -15, 45, -225, ...

Jika kita amati, barisan bilangan tersebut tidak memiliki selisih yang tetap seperti pada barisan aritmatika. Barisan-barisan tersebut memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang tetap (*coba Anda buktikan!*). Barisan yang memiliki hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap maka dinamakan **barisan geometri**. Konstanta hasil bagi tiap suku dengan suku sebelumnya yang selalu tetap dinamakan **rasio** (r).

Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.

Misalkan kita memiliki sebuah barisan geometri dengan:

$$U_1 = a, \text{ rasio} = r, \text{ maka akan kita dapatkan:}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = r \Leftrightarrow U_2 = U_1 \times r = a \times r = ar$$

$$\frac{U_3}{U_2} = r \Leftrightarrow U_3 = U_2 \times r = ar \times r = ar^2$$

$$\frac{U_4}{U_3} = r \Leftrightarrow U_4 = U_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$$

dan seterusnya, sehingga pola umum dari barisan geometri adalah:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Dari pola tersebut maka $U_n = a \times r^{n-1}$.

Setelah mengetahui rumus suku ke- n pada barisan geometri, sekarang bagaimana dengan penjumlahan suku-suku pada barisan geometri atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \dots$$

Misalkan S_n adalah jumlah n suku pertama pada suatu barisan geometri.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r \times S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad -$$

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$

Contoh:

Seutas tali dipotong menjadi 7 bagian dengan ukuran panjangnya membentuk deret geometri. Jika panjang bagian tali yang terpendek adalah 3 cm dan panjang bagian tali terpanjang adalah 192 cm, maka panjang tali seluruhnya adalah

Penyelesaian:

$$a = 3, U_n = 192, n = 7.$$

Dari permasalahan tersebut yang belum diketahui adalah rasio, maka sebelum kita menghitung jumlah panjang tali seluruhnya, kita akan menentukan ratio terlebih dahulu.

$$U_n = a \times r^{n-1}$$

$$192 = 3 \times r^{7-1}$$

$$r^6 = 64$$

$r = 2$, karena $r > 1$, maka:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{3(128 - 1)}{1}$$

$$S_n = 381.$$

Jadi, panjang tali seluruhnya adalah 381 cm.

c. Persamaan Linear, Pertidaksamaan Linear, dan Grafik Fungsi Linear

Persamaan merupakan pernyataan matematika yang terdiri dari dua buah yang dipisahkan dengan tanda “=”. Persamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”. Penyelesaian dari suatu persamaan merupakan sebarang bilangan yang membuat nilai persamaan itu benar jika bilangan tersebut disubstitusikan (digantikan) pada variabel. Persamaan linear yang akan dibahas adalah persamaan linear satu variabel dan persamaan linear dua variabel.

1) Persamaan linear satu variabel

Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah:

$$ax + b = c, a \neq 0.$$

Contoh:

Tentukan nilai x dari persamaan berikut ini:

a. $5x - 4 = 26$

$$\leftrightarrow 5x - 4 = 26$$

$$\leftrightarrow 5x - 4 + 4 = 26 + 4$$

$$\leftrightarrow 5x = 30$$

$$\leftrightarrow x = 6$$

b. $3(x-4) = 7(x+2) - 5x$

$$\leftrightarrow 3(x - 4) = 7(x + 2) - 5x$$

$$\leftrightarrow 3x - 12 = 7x + 14 - 5x$$

$$\leftrightarrow 3x - 12 = 2x + 14$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 + 12 = 2x + 14 + 12$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x = 2x - 2x + 26$$

$$\Leftrightarrow x = 26$$

$$c. \frac{x}{3} + \frac{2x}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{2x}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x)}{3(4)} + \frac{2x(3)}{4(3)} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{6x}{12} = 12$$

$$\Leftrightarrow 10x = 144$$

$$\Leftrightarrow x = 14,4$$

2) Persamaan linear dua variabel

Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah:

$$ax + by = c, \text{ dengan } a \text{ dan } b \neq 0.$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan:

$$a. \quad 6x + 2y = 8$$

$$5x - y = 12$$

Penyelesaian:

Cara eliminasi:

Menentukan nilai x

$$(1) \quad 6x + 2y = 8$$

$$(2) \quad 5x - y = 12 \quad (\text{kalikan dengan } 2)$$

$$\text{Persamaan (2) menjadi } 10x - 2y = 24$$

$$(1) \quad 6x + 2y = 8$$

$$(2) \quad \underline{10x - 2y = 24} \quad +$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

Menentukan nilai y

$$(1) \quad 6x + 2y = 8 \quad (\text{kalikan dengan } 5)$$

$$(2) 5x - y = 12 \quad (\text{kalikan dengan } 6)$$

Persamaannya menjadi:

$$(1) 30x + 10y = 40$$

$$(2) \underline{30x - 6y = 72} \quad -$$

$$16y = -32$$

$$y = -2$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

Cara substitusi

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12$$

Persamaan (2) menjadi $-y = 12 - 5x$ atau $y = 5x - 12$.

Persamaan (1) $6x + 2y = 8$

$$6x + 2(5x - 12) = 8$$

$$6x + 10x - 24 = 8$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

$$y = 5x - 12$$

$$y = 5(2) - 12$$

$$y = -2$$

Cara gabungan eliminasi dan substitusi

Menentukan nilai x

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) 5x - y = 12 \quad (\text{kalikan dengan } 2)$$

Persamaan (2) menjadi $10x - 2y = 24$

$$(1) 6x + 2y = 8$$

$$(2) \underline{10x - 2y = 24} \quad +$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

$$5x - y = 12$$

$$5(2) - y = 12$$

$$y = -2$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, -2\}$

- b. Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah ... tahun.

Penyelesaian:

Misalkan umur ayah = a , umur Budi = b

Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan umur Budi:

$$(a - 7) = 6(b - 7)$$

$$(a - 7) = 6b - 42$$

$$a - 7 = 6b - 42$$

$$a = 6b - 35$$

Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9.

$$2(a + 4) = 5(b + 4) + 9$$

$$2a + 8 = 5b + 29$$

$$2a = 5b + 21$$

(dari persamaan sebelumnya $a = 6b - 35$)

$$2(6b - 35) = 5b + 21$$

$$12b - 70 = 5b + 21$$

$$7b = 91$$

$$b = 13$$

$$a = 6b - 35$$

$$a = 6(13) - 35$$

$$a = 43$$

Jadi, umur ayah sekarang adalah 43 tahun.

- c. Harga 7 buah pulpen dan 3 buah penghapus adalah Rp11.150, sedangkan harga 5 buah pulpen dan 5 buah penghapus adalah Rp10.250. Berapakah harga 8 buah pulpen dan 7 buah penghapus?

Penyelesaian:

Misalkan harga pulpen = x , harga penghapus = y

Bentuk matematika menjadi:

$$7x + 3y = 11.150$$

$$5x + 5y = 10.250$$

Dengan menggunakan metode gabungan eliminasi dan substitusi, diperoleh nilai $x = \text{Rp}1.250$ dan $y = \text{Rp}800$ (*coba Anda buktikan!*).

Harga 8 pulpen dan 7 penghapus adalah Rp15.600.

3) Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel dengan derajat tertingginya satu dan dihubungkan dengan tanda “ $\neq$ ”, “ $<$ ”, “ $>$ ”, “ $\leq$ ”, atau “ $\geq$ ”.

Catatan:

Prinsip yang digunakan: jika kedua ruas dikalikan/dibagi dengan bilangan negatif, maka tanda pertidaksamaan harus dirubah, misalnya dari $<$ atau $\leq$ menjadi $>$ atau $\geq$ ataupun sebaliknya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $4x + 10 > 26$

$$4x + 10 > 26 - 10$$

$$\leftrightarrow 4x - 10 + 10 > 16$$

$$\leftrightarrow 4x > 16$$

$$\leftrightarrow x > 4$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > 4, x \in \mathbb{R}\}$.

b. $2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$

$$2(x - 4) < 7(x + 2) - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 7x + 14 - 4x$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 < 3x + 14$$

$$\leftrightarrow 2x - 8 + 8 < 3x + 14 + 8$$

$$\leftrightarrow 2x - 3x < 3x - 3x + 26$$

$$\leftrightarrow -x < 26$$

$$\leftrightarrow x > -26$$

Himpunan penyelesaiannya adalah: $\{x|x > -26, x \in \mathbb{R}\}$.

4) Grafik Fungsi Linear

Sebuah fungsi linear $y = f(x)$ dapat kita gambarkan grafik fungsi linearnya. Untuk menggambar grafik suatu fungsi terlebih dahulu dicari pasangan-pasangan terurut dari fungsi itu, kemudian menggambar pasangan itu sebagai titik pada suatu sistem koordinat lalu menghubungkan titik-titik tersebut.

Grafik fungsi linear yang memiliki kemiringan garis (gradien) m dan melewati titik $A(x_1, y_1)$, persamaan garisnya adalah:

$$(y - y_1) = m(x - x_1).$$

Misalkan terdapat suatu grafik fungsi linear yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ atau merupakan bentuk lain dari } (y - y_1) = m(x - x_1)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis g yang melalui titik $(1,2)$ dan $(3,4)$!

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{3 - 1}$$

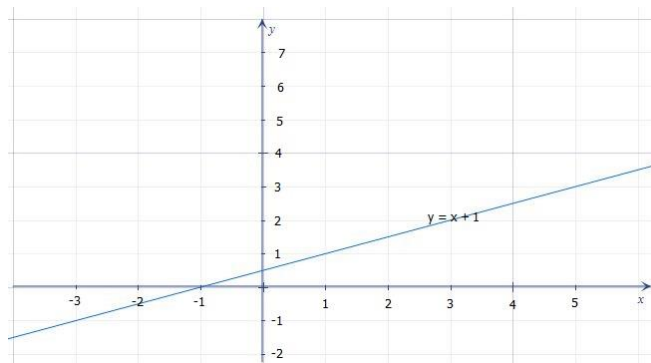
$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{2}$$

$$2(y - 2) = 2(x - 1)$$

$$2y - 4 = 2x - 2$$

$$2y = 2x + 2$$

$$y = x + 1$$



Apabila terdapat dua buah garis, maka kedua garis tersebut mungkin akan berpotongan di satu titik (pada bahasan ini yang akan dibahas adalah dua garis yang saling tegak lurus) atau mungkin juga tidak berpotongan (yang selanjutnya dinamakan garis sejajar). Hubungan antara dua garis atau grafik fungsi linear:

1) Dua garis sejajar

Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, ditulis dengan $m_1 = m_2$. Dengan kata lain dua garis dikatakan sejajar apabila dua garis tersebut tidak memiliki titik potong. Ilustrasi paling sederhana dari dua garis sejajar adalah rek kereta api.

Contoh:

Tentukan persamaan garis l yang melalui titik $(-3,5)$ dan sejajar dengan garis g melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis g .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4 - (-2)}{8 - 4}$$

$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis l .

Karena gradien dua garis yang sejajar adalah sama, $m_1 = m_2 = \frac{3}{2}$,

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$(y - 5) = \frac{3}{2} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 2 (y - 5) = 3 (x + 3)$$

$$\leftrightarrow 2y - 10 = 3x + 9$$

$$\leftrightarrow 2y = 3x + 19$$

$$\leftrightarrow y = \frac{3x + 19}{2}$$

2) Dua garis saling tegak lurus

Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1 atau dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh:

Tentukan persamaan garis k yang melalui titik $(-3,5)$ dan tegak lurus dengan garis h yang melalui titik $(8,4)$ dan $(4,-2)$!

Penyelesaian:

Menentukan gradien garis h

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4 - (-2)}{8 - 4}$$

$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Menentukan persamaan garis k

Karena gradien dua garis yang tegak lurus adalah $m_1 \cdot m_2 = -1$,

sehingga $m_2 = -\frac{2}{3}$

Maka:

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$\leftrightarrow (y - 5) = -\frac{2}{3} (x - (-3))$$

$$\leftrightarrow 3 (y - 5) = -2 (x + 3)$$

$$\leftrightarrow 3y - 15 = -2x - 6$$

$$\leftrightarrow 3y = -2x + 9$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-2x + 9}{3}$$

d. Persamaan Kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat, dan Grafik Fungsi Kuadrat

1) Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian atau akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 dari persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan memfaktorkan, melengkapkan bentuk kuadrat, menggunakan rumus kuadratis, dan menggambar grafik fungsi kuadrat.

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat dari $x^2 - 3x - 18 = 0$.

Penyelesaian:

Untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat, perhatikan cara-cara berikut ini:

a. Memfaktorkan

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 6)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ atau } x = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

b. Melengkapkan kuadrat

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 18$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ kedua ruas ditambahkan dengan}$$

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{12}{2}$$

$$x_1 = 6$$

Atau

$$x_1 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-6}{2}$$

$$x_1 = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

c. Rumus kuadratis

Dari persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 18 = 0$, maka:

$$a = 1, b = -3, c = -18$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-18)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{3+9}{2} = 6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{3-9}{2} = -3$$

Akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah -3 atau 6.

2) Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda $\neq$, atau “<”, atau “>”, atau “ $\leq$ ”, atau “ $\geq$ ”.

Contoh:

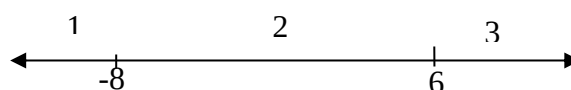
Tentukan himpunan penyelesaian dari $x^2 + 2x - 48 < 0$.

Penyelesaian:

Langkah awal, ubahlah pertidaksamaan tersebut menjadi sebuah persamaan, sehingga menjadi $x^2 + 2x - 48 = 0$.

Dengan menggunakan pemfaktoran, diperoleh $x_1 = -8$ atau $x_2 = 6$.
(coba Anda buktikan menggunakan salah satu cara seperti sebelumnya!)

Untuk menentukan daerah hasilnya, kita akan menggunakan bantuan garis bilangan, seperti pada gambar berikut ini:



Berdasarkan gambar di atas, pada garis bilangan dibagi menjadi 3 daerah, yaitu daerah 1, daerah 2, dan daerah 3. Untuk memudahkan kita akan coba mengambil $x = 0$, yang berada pada daerah 2 (*mengapa?*) yang kemudian kita substitusikan ke:

$x^2 + 2x - 48 = 0^2 + 2(0) - 48 = -48$, hasilnya adalah bilangan negatif, artinya pada daerah $x^2 + 2x - 48 < 0$. Himpunan penyelesaiannya adalah $\{x | -8 < x < 6, x \in \mathbb{R}\}$.

Akar-akar persamaan kuadrat memungkinkan bilangan real atau mungkin juga bilangan imajiner. Hal tersebut ditentukan oleh nilai D

atau diskriminan. Dengan melihat nilai diskriminan ($D = b^2 - 4ac$), jenis-jenis akar persamaan kuadrat dibagi tiga, yaitu:

1. Jika $D > 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan berbeda.
2. Jika $D = 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan real dan kembar (sama).
3. Jika $D < 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan kompleks dan berbeda.

Contoh:

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dari persamaan kuadrat berikut ini:

1. $x^2 - 3x - 18 = 0$

Penyelesaian:

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (-18)$$

$$D = 9 + 72$$

$$D = 81$$

Karena $D > 0$ maka kedua akar persamaan kuadrat tersebut merupakan bilangan real dan berbeda (terbukti pada contoh sebelumnya).

2. $x^2 - 10x + 25 = 0$

Dengan memeriksa nilai diskriminan,

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \times (1) \times (25)$$

$$D = 100 - 100$$

$$D = 0$$

Karena $D = 0$ maka, kedua akar persamaan kuadrat tersebut real dan kembar (*coba Anda buktikan berapa nilai akar persamaan kuadrat tersebut!*).

Bagaimana jika kita diminta menentukan bentuk persamaan kuadrat yang akar-akar persamaan kuadrat tersebut diketahui? Perhatikan contoh berikut ini:

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya adalah 6 dan -4!

Karena akarnya adalah 6 dan -4, maka dapat kita tuliskan

$$\begin{aligned}(x-6)(x-(-4)) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-6x+4x-24 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-24 &= 0\end{aligned}$$

Secara umum, bentuk tersebut dapat ditulis:

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= 0 \\ x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 &= 0\end{aligned}$$

Ingat kembali rumus kuadratis yang telah dipelajari sebelumnya, yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dapat dijabarkan:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ maka} \\ x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 + x_2 &= \frac{-2b}{2a} \\ x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a}, \text{ dan} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{(-b)^2+b\sqrt{b^2-4ac}-b\sqrt{b^2-4ac}-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{4ac}{4a^2} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

Menentukan persamaan kuadrat dapat digunakan rumus:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2 = 0$$

Contoh:

Akar-akar persamaan kuadrat $3x^3 + 2x - 1 = 0$ adalah a dan b .

Tentukanlah persamaan kuadrat baru yang akarnya $2a$ dan $2b$!

Dari persamaan kuadrat $3x^3 + 2x - 1 = 0$, diperoleh:

$$a + b = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{3}$$

$$a \times b = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru:

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a + b) = 2 \times \frac{-2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$x_1 \times x_2 = (2a) \times (2b) = 4 \times a \times b = 4 \times \frac{-1}{3} = \frac{-4}{3}$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4}{3}\right)x + \frac{-4}{3} = 0$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

3) Grafik Fungsi Kuadrat

Setelah mempelajari tentang akar-akar persamaan kuadrat, maka selanjutnya akan dibahas mengenai grafik fungsi kuadrat.

Berikut langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat $f(x) = y = ax^2 + bx + c$:

- Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y . Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$, dan titik potong dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0$.
- Menentukan persamaan sumbu simetri, garis $x = -\frac{b}{2a}$
- Menentukan koordinat titik balik $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Misalkan gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$! Langkah yang akan kita lakukan adalah sebagai berikut:

- Menentukan titik potong sumbu x dan sumbu y .

Titik potong dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 1$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah $(1,0)$ dan $(3,0)$.

Titik potong dengan sumbu y , diperoleh jika $x = 0$.

$$f(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah $(0,3)$

b) Persamaan sumbu simetri.

Persamaan sumbu simetri $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ adalah

$$\text{garis } x = -\frac{b}{2a}$$

sumbu simetri pada $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah:

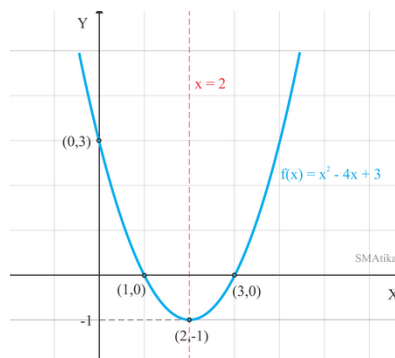
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

c) Menentukan koordinat titik balik.

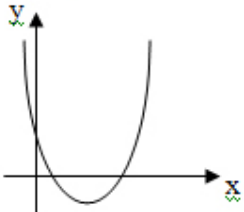
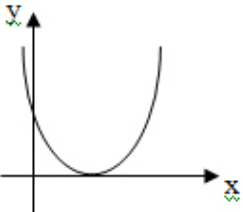
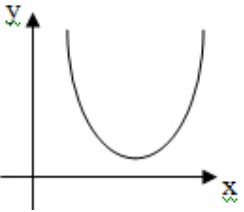
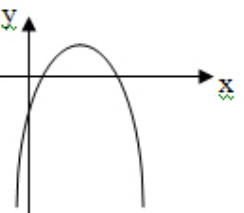
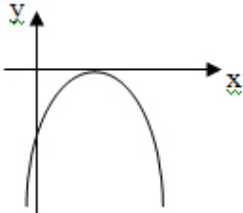
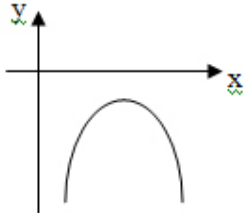
Karena sumbu simetri $x = 2$, maka $f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$

koordinat titik balik $(2, -1)$.

Diperoleh sketsa grafik sebagai berikut:



Berdasarkan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, dan nilai a , maka secara geometris akan terdapat 6 kemungkinan bentuk grafik fungsi, yaitu:

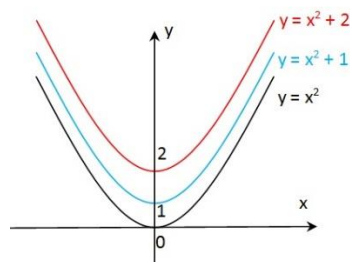
$D > 0 \text{ dan } a > 0$	$D = 0 \text{ dan } a > 0$	$D < 0 \text{ dan } a > 0$
		
$D > 0 \text{ dan } a < 0$	$D = 0 \text{ dan } a < 0$	$D < 0 \text{ dan } a < 0$
		

4) Pergeseran Grafik Fungsi Kuadrat

Sebuah grafik fungsi kuadrat, akan dapat digeser searah sumbu X ataupun searah sumbu Y . Misalkan terdapat sebuah grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$, akan digeser sejauh m ke arah kanan, dan n satuan ke arah atas. Persamaan kuadrat itu akan menjadi:

$$y - n = f(x - m) \dots\dots*)$$

Perhatikan grafik fungsi di bawah ini. Grafik fungsi tersebut menggambarkan: $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, dan $y = x^2 + 2$.



Pertama perhatikan grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah atas, maka berdasarkan *) menjadi

$$y - 1 = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2 + 2$$

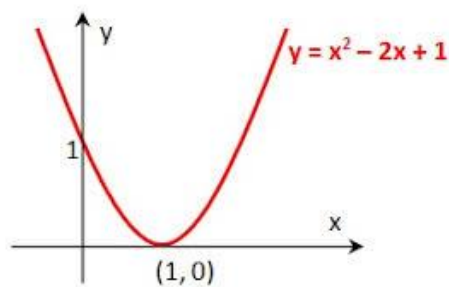
Untuk selanjutnya akan dicek juga grafik fungsi $y = x^2 + 1$, jika grafik fungsi tersebut digeser 1 satuan ke arah bawah atau dapat ditulis digeser -1, maka grafik fungsinya akan menjadi:

$$y - (-)1 = x^2 + 1 \text{ atau } y = x^2$$

Perhatikan contoh selanjutnya. Lihat kembali grafik fungsi $y = x^2$ pada gambar sebelumnya. Grafik fungsi $y = x^2$ akan digeser satu satuan ke arah kanan. Persamaan kuadrat akan menjadi:

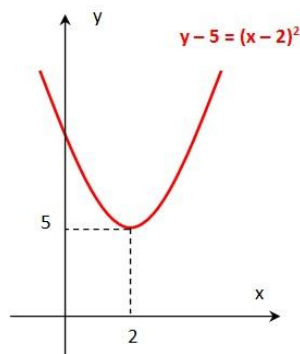
$$y - n = f(x - m),$$

$m = 1$ (karena satu satuan ke arah kanan), dan $n = 0$ (karena tidak bergeser ke arah atas atau bawah), maka persamaan kuadrat akan menjadi: $y = (x - 1)^2$ atau $y = x^2 - 2x + 1$.



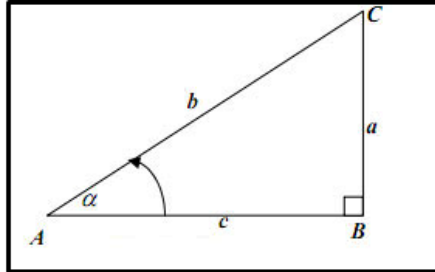
Contoh selanjutnya adalah jika fungsi kuadrat $y = x^2$ digeser 2 satuan ke kanan dan 5 satuan ke arah atas, maka akan menjadi:

$y - 5 = (x - 2)^2$, mengapa?



e. Trigonometri

Perhatikan segitiga siku-siku berikut ini:



Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan sisi-sisi dengan aturan tertentu. Perbandingan tersebut dikenal dengan perbandingan trigonometri. Pada bahasan ini akan dibahas tiga perbandingan

trigonometri yaitu *sinus* (*sin*), *cosinus* (*cos*), dan *tangen* (*tan*). Pada gambar segitiga tersebut perhatikan bahwa sisi *b* disebut sebagai sisi miring, sisi *a* disebut sebagai sisi depan karena berada di depan sudut α , dan sisi *c* disebut sebagai sisi samping karena berada di samping sudut α . Berdasarkan gambar segitiga siku-siku tersebut maka berlaku perbandingan trigonometri sebagai berikut:

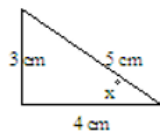
$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c}$$

Contoh:

Perhatikan gambar di bawah ini! Tentukan $\sin x$, $\cos x$, dan $\tan x$!



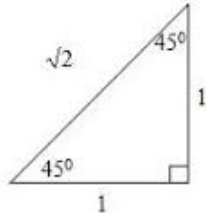
Penyelesaian:

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

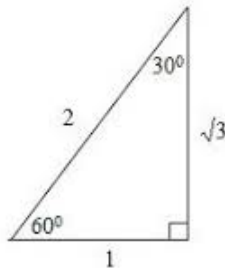
$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Perhatikan dua segitiga siku-siku istimewa berikut ini:



Gambar 1



Gambar 2

Gambar 1 adalah gambar segitiga siku-siku sama kaki dengan besar dua sudut selain sudut siku-siku masing-masing adalah 45° . Gambar 2 adalah gambar segitiga siku-siku dengan besar sudut selain sudut siku-siku adalah 30° dan 60° . Berdasarkan Gambar 1 dan Gambar 2 kita akan menentukan nilai $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$, untuk besar nilai α adalah 30° , 45° , dan 60° .

Perhatikan Gambar 1:

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Perhatikan Gambar 2:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

Hasil perhitungan di atas dirangkum pada Tabel berikut ini:

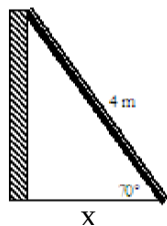
	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tak terhingga

Contoh:

Sebuah tangga yang panjangnya 4 meter bersandar pada sebuah tembok. Tangga tersebut membentuk sudut 70° dengan lantai. Jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah ... meter.

Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan tersebut, dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Misalkan x adalah jarak ujung bawah tangga dengan lantai, maka:

$$\cos 70^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} \text{ (mengapa kita menentukan cosinus?)}$$

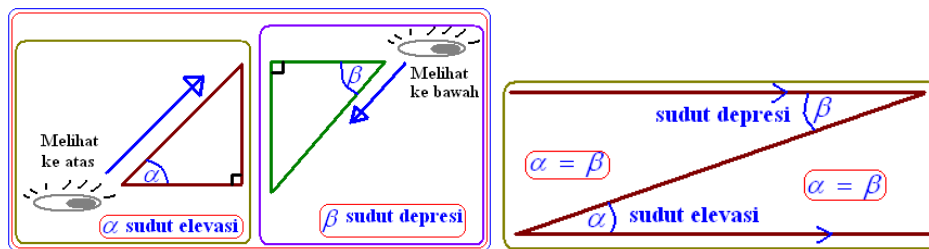
$$0,342 = \frac{x}{4} \quad (\cos 70^\circ = 0,342)$$

$$x = 1,368 \text{ m.}$$

Jadi jarak ujung bawah tangga dengan tembok adalah 1,368 meter.

(Catatan: menentukan nilai $\sin$, $\cos$, $\tan$ dapat menggunakan bantuan kalkulator)

Memandang sebuah objek dari suatu titik tertentu bergantung dengan sudut elevasi ataupun sudut depresi. Gambar berikut ini adalah ilustrasi perbedaan sudut elevasi dan sudut depresi.



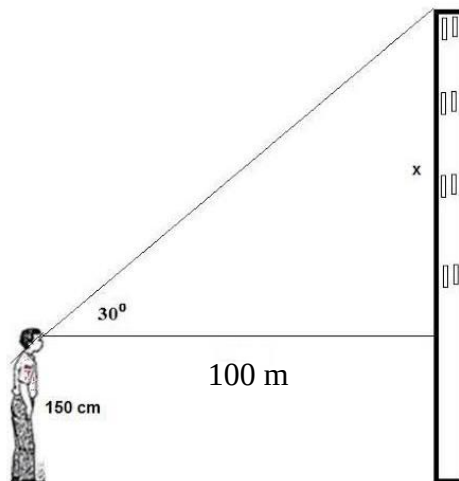
Dengan kata lain, sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.

Contoh:

Anton berdiri menghadap sebuah gedung dengan jarak 100 m. Anton ingin mengukur tinggi gedung tersebut dengan menggunakan klinometer dan Anton memandang puncak gedung dengan sudut elevasi sebesar 30° . Apabila tinggi Anton adalah 150 cm, maka tinggi gedung yang diukur Anton adalah ... m.

Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi berikut ini:



Untuk menentukan tinggi gedung, maka terlebih dahulu kita akan menentukan nilai x terlebih dahulu. Nilai x dapat ditentukan dengan mencari $\tan 30^\circ$.

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{100}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{x}{100}$$

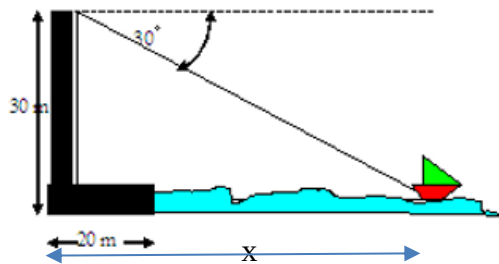
$$x = \frac{100}{3}\sqrt{3} = 57,73 \text{ meter}$$

$$\text{Tinggi gedung} = 57,73 \text{ meter} + 1,5 \text{ meter} = 59,23 \text{ meter}$$

Contoh:

Seorang petugas pelabuhan mengamati sebuah kapal dari menara pelabuhan dengan sudut depresi 30° terhadap horizontal. Jika tinggi menara 30 meter, dan menara terletak 20 meter dari bibir pantai. Berapakah jarak kapal dari bibir pantai?

Penyelesaian:



Perhatikan gambar tersebut! Pada gambar tersebut tampak bahwa tinggi Menara adalah sisi depan, dan jarak kapal dengan menara adalah 20 meter. Misal jarak kapal terhadap menara pengamat adalah x meter.

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{\tan 30^\circ}$$

$$x = \frac{30}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{30}{0,577} = 51,993.$$

Karena x adalah jarak kapal dengan menara pengamat, maka jarak kapal ke bibir pantai adalah $51,993 - 20 = 31,993$ meter.

4. Tugas Terstruktur

Setelah membaca dan memahami isi modul ini, coba Anda selesaikan tugas berikut ini:

Pada kajian trigonometri, selain $\sin$, $\cos$, $\tan$ juga dikenal $\csc$, $\sec$, $\cot$. Coba Anda cari hubungan antara $\sin$, $\cos$, $\cot$ dengan $\csc$, $\sec$, $\cot$!

5. Forum Diskusi

Untuk menambah penguasaan materi Anda, silakan selesaikan forum diskusi mengenai materi bilangan berikut ini:

Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini:

Jika saya lapar maka saya makan nasi.

Jika saya makan nasi maka saya kenyang.

Kesimpulannya adalah: Jika saya lapar maka saya kenyang.

Menurut Anda, apakah kesimpulan tersebut tepat? Kemukakan alasannya!

C. PENUTUP

1. Rangkuman

a. Logika Matematika.

1. Pernyataan adalah kalimat matematika tertutup yang memiliki nilai kebenaran “benar” atau “salah”, tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang bersamaan.
2. Operasi uner yaitu operasi negasi atau ingkaran, dimana nilai kebenaran negasi sebuah pernyataannya kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataan semula.
3. Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur, yaitu meliputi operasi konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.
4. Tautologi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya benar tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.

5. Kontradiksi adalah pernyataan yang semua nilai kebenarannya salah tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya.
6. Kontingensi adalah pernyataan yang bukan merupakan tautologi dan kontongensi.
7. Pernyataan kondisional ($p \rightarrow q$), memiliki hubungan konvers ($q \rightarrow p$), invers ($\sim p \rightarrow \sim q$), dan kontrapositif ($\sim q \rightarrow \sim p$).
8. Aturan penarikan kesimpulan antara lain: modus ponens, modus tolens, dan silogisme.

b. Pola Bilangan dan Deret Bilangan.

1. Penalaran deduktif atau berpikir deduktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyataan yang bersifat umum.
2. Penalaran induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Penalaran induktif meliputi pola, dugaan dan pembentukan generalisasi.
3. Rumus pola persegi panjang adalah $Un = n(n + 1)$, Rumus pola bilangan persegi adalah $Un = n^2$, Rumus pola bilangan segitiga adalah $Un = \frac{n}{2}(n + 1)$.
4. Sebuah barisan dinamakan barisan aritmatika jika dan hanya jika selisih dua suku yang berurutan selalu tetap.
5. Rumus suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $U_n = a + (n - 1)b$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan aritmatika adalah: $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$.
6. Suatu barisan dinamakan barisan geometri jika dan hanya jika hasil bagi setiap suku dengan suku sebelumnya selalu tetap.
7. Rumus suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $U_n = a \times r^{n-1}$, dan jumlah suku ke- n dari suatu barisan geometri adalah: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1$.

c. Persamaan linear, Pertidaksamaan Linear dan Grafik Fungsi Linear.

1. Persamaan linier adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “=”.
2. Bentuk umum persamaan linear satu variabel adalah:
 $ax + b = c, a \neq 0$.
3. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah:
 $ax + by = c$, dengan a dan $b \neq 0$.
4. Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear dua variabel dapat menggunakan metode eliminasi atau metode substitusi.
5. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya satu yang dihubungkan dengan tanda “ $\neq$ ”, atau “ $<$ ”, atau “ $>$ ”, atau “ $\leq$ ”, atau “ $\geq$ ”.
6. Persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah:
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
7. Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, yaitu $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.
8. Misalkan terdapat suatu garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka kemiringan garis itu adalah $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
9. Dua garis dikatakan sejajar jika gradien (kemiringan) kedua garis tersebut sama, dapat ditulis $m_1 = m_2$.
10. Dua garis dikatakan tegak lurus jika perkalian dua gradien sama dengan -1, dapat ditulis $m_1 \cdot m_2 = -1$.

d. Persamaan kuadrat, Pertidaksamaan Kuadrat dan Grafik Fungsi Kuadrat.

1. Persamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “=”.

2. Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih variabel yang derajat tertingginya dua yang dihubungkan dengan tanda “<”, “>”, “≤”, atau “≥”.
3. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah: $ax^2 + bx + c = 0$, dimana $a \neq 0$. Untuk menentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran, melengkapkan kuadrat, ataupun rumus kuadratis.
4. Menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan cara menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y , menentukan persamaan sumbu simetri dan menentukan koordinat titik balik.

e. Trigonometri

1. Perbandingan trigonometri merupakan perbandingan yang berlaku pada segitiga siku-siku. Perbandingan trigonometri yang dikenal antara lain

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{b}, \cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{c}{b},$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{a}{c} \text{ atau } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$
2. sudut elevasi adalah sudut yang dibentuk arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas. Sudut depresi adalah sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.

2. Tes Formatif

1. Pernyataan yang ekuivalen dengan pernyataan: “Jika x bilangan genap dan y bilangan ganjil, maka $x + y$ bilangan ganjil” adalah ...
 - a. Jika $x + y$ bilangan genap, maka x bilangan ganjil dan y bilangan genap
 - b. Jika $x + y$ bilangan genap, maka x bilangan ganjil atau y bilangan genap
 - c. Jika x bilangan ganjil dan y bilangan genap, maka $x + y$ bilangan genap
 - d. Jika x bilangan ganjil atau y bilangan genap, maka $x + y$ bilangan genap
 - e. Jika $x + y$ bilangan genap, maka x bilangan genap atau y bilangan genap
2. P_1 : Jika Firman mengerjakan latihan soal matematika, maka Firman siap untuk ikut tes.
 P_2 : Jika Firman siap untuk ikut tes, maka Anton akan belajar bersama Firman.
 P_3 : Anton tidak belajar bersama Firman.
Kesimpulan yang tepat dari pernyataan-pernyataan tersebut adalah ...
 - a. Firman mengerjakan latihan soal matematika.
 - b. Firman ikut tes.
 - c. Firman tidak ikut tes.
 - d. Firman tidak mengerjakan soal matematika.
 - e. Anton belajar bersama Firman
3. Suku ke-9 dan suku ke-10 dari barisan berikut 3, 4, 7, 11, 18, ...
 - a. 29 dan 47.
 - b. 47 dan 76.
 - c. 76 dan 123.
 - d. 123 dan 199.
 - e. 199 dan 322.

4. Perhatikan pola berikut ini:

Pola ke-1 , $1 = 1$

Pola ke-2, $4 = 1 + 3$

Pola ke-3, $9 = 1 + 3 + 5$

Pola ke-4, $16 = 1 + 3 + 5 + 7$

Pola ke-18, $m = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$.

Nilai $m - 2n$ adalah

- a. 254
 - b. 289
 - c. 324
 - d. 355
 - e. 394
5. Jumlah suku-suku deret aritmatika yang suku pertamanya 52, suku terakhirnya 158, dan beda 4 adalah ...
- a. 5.400
 - b. 5.460
 - c. 5.670
 - d. 5.720
 - e. 5.940
6. Tujuh tahun yang lalu umur Ibu sama dengan enam kali umur Hani. Tahun depan umur Ibu dua lebihnya dari tiga kali umur Hani. Umur Hani dua tahun yang lalu adalah ... tahun
- a. 10
 - b. 11
 - c. 12
 - d. 13
 - e. 14

7. Persamaan garis yang melalui titik $(-4, 3)$ dan $(1, -3)$ adalah
- $-6x + 5y = -9$
 - $6x - 5y = -9$
 - $6x + 5y = 9$
 - $-6x + 5y = 9$
 - $6x + 5y = -9$
8. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 9x + 10 = 0$, maka nilai dari $(2x_1 - 3x_2)^2$ adalah
- $\frac{1}{4}$
 - $\frac{1}{2}$
 - 0
 - 1
 - 2
9. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya tiga kali dari akar persamaan $4x^2 - 16 = 0$ adalah
- $x^2 - 36 = 0$
 - $x^2 - 12x - 36 = 0$
 - $4x^2 - 3x - 16 = 0$
 - $2x^2 - 36 = 0$
 - $12x^2 - 48 = 0$
10. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 9$ akan digeser ke kiri 2 satuan dan ke atas 3 satuan, maka persamaan grafik fungsi hasil pergeseran adalah
- $x^2 + 4x - 2 = 0$
 - $x^2 + 4x + 2 = 0$
 - $x^2 + 4x + 10 = 0$
 - $x^2 - 4x - 2 = 0$
 - $x^2 - 4x + 2 = 0$

DAFTAR PUSTAKA

- Herman, T., Mujono. (2008). *Logika Matematika*. Bandung: UPI Press.
- Fitriani, A. D. (2019). *Kapita Selekta Matematika (Modul PPG)*. Tidak diterbitkan.
- Kusumah, Yaya. (1986). *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Tarsito.
- Prabawanto, S., Mujono. (2006). *Statistika dan Peluang*. Bandung: UPI Press.
- Prabawanto, S., Rahayu, P. (2006). *Bilangan*. Bandung: UPI Press.
- Russeffendi. (2006). *Pengantar kepada Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.

TES SUMATIF

1. Pak Nandi ingin menerapkan pembelajaran berdasarkan pada Teori Bruner pada materi penjumlahan dua buah bilangan bulat $4 + 2$. Secara garis besar, urutan pembelajaran yang dapat dilakukan oleh pak Nandi adalah ...
 - a. Menyimbolkan (menuliskan) operasi hitung penjumlahan bilangan $2 + 4$ di papan tulis, menggambarkan model penghapus di papan tulis, dilanjutkan dengan menggunakan benda konkret (4 buah penghapus dan 2 buah penghapus), kemudian siswa diminta menghitung semua penghapus.
 - b. Menggunakan benda konkret (4 buah penghapus dan 2 buah penghapus), siswa diminta menghitung semua penghapus, kemudian menggambarkan model penghapus di papan tulis, selanjutnya menyimbolkan operasi hitung penjumlahan bilangan $2 + 4$ di papan tulis.
 - c. Menggunakan benda konkret (4 buah penghapus dan 2 buah penghapus), siswa diminta menghitung semua penghapus, kemudian menyimbolkan dalam bentuk bilangan, selanjutnya menggambarkan model penghapus di papan tulis.
 - d. Menggambarkan model gambar penghapus di papan tulis, menggunakan benda konkret (4 buah penghapus dan 2 buah penghapus), kemudian siswa diminta menghitung semua penghapus, selanjutnya menyimbolkan operasi hitung penjumlahan bilangan $2 + 4$ di papan tulis.
 - e. Menggambarkan model gambar penghapus di papan tulis, menyimbolkan operasi hitung penjumlahan bilangan $2 + 4$ di papan tulis, selanjutnya menggunakan benda konkret (4 buah penghapus dan 2 buah penghapus), kemudian siswa diminta menghitung semua penghapus.
2. Diantara pernyataan berikut yang bernilai benar adalah
 - a. 5 bukan merupakan anggota bilangan rasional
 - b. Semua anggota bilangan bulat adalah bilangan cacah
 - c. $0,555\dots$ merupakan bilangan irasional, karena tidak dapat dirubah menjadi bentuk $\frac{a}{b}$
 - d. $0,666\dots$ merupakan bilangan rasional karena $0,666\dots = \frac{2}{3}$

- e. Ada anggota himpunan bilangan asli yang bukan anggota himpunan bilangan cacah.
3. Sebuah pekerjaan perbaikan jalan direncanakan selesai dalam waktu 60 hari oleh 20 orang pekerja. Setelah 12 hari bekerja, pekerjaan terhenti selama 8 hari. Jika kemampuan bekerja setiap pekerja dianggap sama dan agar pembangunan selesai tepat waktu, banyak pekerja tambahan yang diperlukan adalah....
- 4 pekerja
 - 8 pekerja
 - 10 pekerja
 - 12 pekerja
 - 24 pekerja
4. Seorang siswa menuliskan bahwa pecahan senilai dari $\frac{1}{2}$ adalah $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}$, dst. Di antara soal-soal berikut ini yang dapat mengukur kemampuan berpikir tingkat tinggi sesuai materi tersebut adalah
- Ibu memiliki $\frac{1}{3}$ bagian kue, kemudian ayah memberi $\frac{1}{2}$ bagian kue yang sama kepada ibu. Besar bagian kue yang dimiliki oleh ibu adalah
 - Apakah terdapat pecahan diantara $\frac{5}{6}$ dan $\frac{6}{7}$?
 - Tentukanlah nilai sebuah pecahan A , apabila pembilang A ditambah 2 maka akan diperoleh pecahan baru yaitu $\frac{2}{3}$, dan apabila penyebut dikurangi 1 maka akan diperoleh pecahan baru yaitu $\frac{1}{2}$!
 - Urutkan pecahan berikut ini, $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, dan $\frac{4}{5}$
 - Pada sebuah kelas terdapat 40 orang siswa. Berdasarkan data ekstrakurikuler $\frac{3}{5}$ nya mengikuti ekstrakurikuler robotik. Banyak siswa yang mengikuti ekstrakurikuler robotik adalah
5. Ibu memiliki setengah loyang kue. Kue tersebut dibagi secara rata untuk ayah, ibu, kakak, dan adik. Ibu hanya memakan $\frac{1}{3}$ dari kue bagiannya dan sisa kue ibu diberikan kepada adik. Bagian kue yang diterima adik seluruhnya adalah
- $\frac{5}{12}$

- b. $\frac{1}{4}$
- c. $\frac{1}{8}$
- d. $\frac{1}{6}$
- e. $\frac{5}{24}$

6. Ibu Endang akan mengajarkan materi bilangan pecahan senilai ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) pada siswanya. Langkah pembelajaran yang dilakukan Ibu Endang adalah sebagai berikut:

- 1) Menyiapkan kertas.
- 2) Membagi kertas pertama menjadi 2 bagian yang sama dan salah satu bagiannya diarsir.
- 3) Siswa menentukan nilai pecahan kertas yang diarsir.
- 4) Melipat 2 lagi kertas tersebut.
- 5) Siswa menentukan nilai pecahan yang baru dari kertas yang diarsir.
- 6) Meminta siswa untuk menunjukkan besar daerah yang diarsir apakah besarnya tetap sama.
- 7) Meminta siswa untuk menuliskan nilai pecahannya.
- 8) Menyimpulkan bahwa daerah yang diarsir tetap, tetapi pecahannya berbeda, namun memiliki nilai yang sama.

Pembelajaran yang dilakukan Ibu Endang adalah pembelajaran dengan pendekatan ...

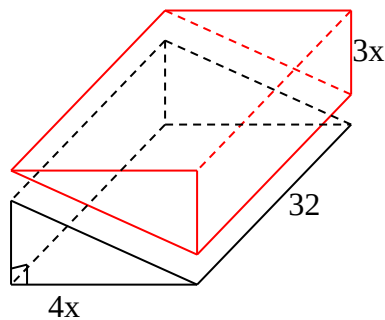
- a. naturalistik
- b. konstruktivisme
- c. behavioristik
- d. dualism
- e. rasionalisme

7. Pernyataan-pernyataan berikut adalah benar, kecuali

- a. Garis tinggi pada segitiga sama sisi juga merupakan garis bagi dan garis berat
- b. Trapezium memiliki dua buah diagonal yang sama panjang

- c. Jajar genjang memiliki dua pasang sisi yang sejajar dan sama panjang
- d. Belah ketupat memiliki dua buah diagonal yang saling tegak lurus yang tidak sama panjang
- e. Persegi panjang merupakan sebuah persegi

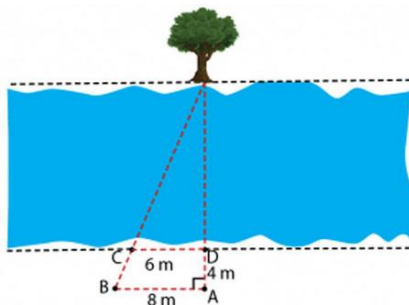
8.



Perhatikan gambar tersebut! Apabila volume bangun tersebut sebelum dipotong menjadi dua buah prisma segitiga adalah 3072cm^3 , maka luas permukaan sebuah prisma segitiga tersebut adalah ... cm^2 .

- a. 1436
 - b. 1536
 - c. 1628
 - d. 1728
 - e. 1920
9. Terdapat sebuah tangki air berbentuk bola dengan diameter 210 cm yang diisi air $\frac{2}{3}$ bagian. $\frac{1}{2}$ bagian air tersebut dipindahkan ke tangki air yang berbentuk tabung dengan diameter 70 cm. Pernyataan berikut ini yang benar, adalah ...
- a. Tinggi tabung sama dengan diameter bola
 - b. Tinggi tabung sama dengan dua kali diameter bola
 - c. Tinggi tabung sama dengan tiga kali diameter bola
 - d. Tinggi tabung sama dengan empat kali diameter bola
 - e. Tidak ada yang tepat dari pernyataan a, b, c, dan d
10. Fahmi mengisi sebuah bak mandi sampai penuh dengan menggunakan 8 ember besar dan 5 ember kecil. Keesokan harinya Reymond mengisi bak mandi yang sama dengan 6 ember besar dan 8 ember kecil. Perbandingan volume ember kecil dan ember besar adalah

- a. Volume ember besar $\frac{2}{3}$ dari ember kecil
 - b. Volume ember besar $\frac{3}{2}$ dari ember kecil
 - c. Volume ember besar $\frac{14}{13}$ dari ember kecil
 - d. Volume ember besar $\frac{13}{14}$ dari ember kecil
 - e. Volume ember besar 2 kali dari ember kecil.
11. Sebuah bak mandi yang berukuran $(60 \times 40 \times 90)$ cm diisi air hingga penuh. Apabila waktu yang diperlukan untuk mengisi bak mandi tersebut adalah 8 menit, debit air untuk mengisi bak mandi tersebut adalah ... liter/detik.
- a. 6,75
 - b. 4,5
 - c. 0,81
 - d. 0,675
 - e. 0,45
12. Sebuah kubus ABCD.EFGH memiliki panjang rusuk 8 cm. AH dan BG adalah diagonal bidang kubus ABCD.EFGH. Luas ABGH adalah ... cm^2 .
- a. 16
 - b. $16\sqrt{2}$
 - c. 64
 - d. $64\sqrt{2}$
 - e. 128
13. Pada suatu kegiatan pramuka, Zaky dan teman-temannya diminta untuk mengukur lebar sebuah sungai. Di seberang sungai terdapat sebuah pohon. Zaky dan teman-temannya menancapkan 4 pasak di seberang pohon, sehingga terlihat seperti gambar berikut ini:



Lebar sungai yang diukur Zaky dan teman-temannya adalah ... m

- a. 11
- b. 12
- c. 15
- d. 16
- e. 24

14. Pernyataan-pernyataan berikut adalah benar, kecuali

- a. Volume tabung adalah luas alas dikali tinggi
- b. Kubus memiliki empat bidang diagonal
- c. Banyaknya rusuk pada prisma segi- n sebanyak $n+2$
- d. Jarring-jaring kerucut terdiri dari satu juring lingkaran dan satu lingkaran alas
- e. Banyaknya sisi pada prisma segi- n sebanyak $n+2$

15. Sebuah foto ditempelkan pada pigura yang berukuran panjang 45 cm dan lebar 30 cm. Jarak foto dengan tepi atas, tepi kanan, dan tepi kiri 5 cm. Jika pigura dan foto sebangun, maka jarak foto dengan tepi bawah pigura yang tidak tertutup foto adalah ... cm.

- a. 5
- b. 7
- c. 8
- d. 10
- e. 12

16. Sebuah bus melaju dengan kecepatan 80 km/jam untuk menempuh jarak tempuh $2S$ km. Kemudian bus tersebut melaju kembali untuk menempuh tempuh $3S$ km dengan kecepatan 60 km/jam. Kecepatan rata-rata bus tersebut adalah ... km/jam.

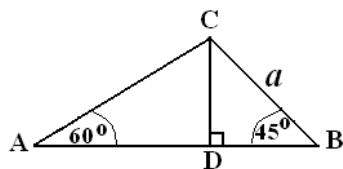
- a. 65,00
- b. 66,67
- c. 68,00
- d. 70,67
- e. 72,00

17. Pak Saiful ingin memesan plat nomor kendaraan dengan aturan B XXXX DI. Apabila Pak Saiful menginginkan tidak ada pengulangan angka di plat nomor tersebut, banyak penomoran yang mungkin ada ... cara.
- 3.024
 - 4.032
 - 4.536
 - 5.040
 - 5.832
18. Dari 10 orang siswa yang terdiri atas 7 orang putra dan 3 orang putri akan dibentuk tim cerdas cermat yang beranggotakan paling banyak 2 orang putri. Banyak tim cerdas cermat yang dapat dibentuk adalah
- 105
 - 140
 - 210
 - 231
 - 252
19. Dari angka- angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 akan dibuat bilangan yang terdiri dari 3 angka yang berbeda. Banyak bilangan yang berbeda yang lebih dari dari 520 tetapi kurang dari 760 adalah
- 120
 - 108
 - 90
 - 84
 - 72
20. Nilai rata-rata tes matematika dari sekelompok siswa dan siswi pada kelas adalah 5 dan 7. Jika rata-rata nilai tes matematika kelas tersebut adalah 6,2; maka perbandingan banyak siswa dan siswi di kelas tersebut adalah
- 2 : 3
 - 3 : 4
 - 2 : 5
 - 3 : 5

- e. 4 : 5
21. Median dan rata-rata dari suatu data yang terdiri dari empat bilangan asli telah diurutkan dari terkecil adalah 8. Apabila selisih antara data terbesar dan data terkecil adalah 10, maka hasil kali data kedua dan keempat adalah
- 16
 - 24
 - 39
 - 64
 - 104
22. Pada kegiatan pemeriksaan kesehatan, diperoleh data rata-rata berat badan siswa kelas IV adalah 40 kg. Ternyata saat dicek kembali pada hari yang sama rata-rata berat badan siswa kelas IV adalah 41 kg, karena saat penimbangan awal terdapat kekeliruan saat mencatat berat badan Hikmal yang sebenarnya yaitu 60 kg tetapi tercatat 30 kg. Banyak siswa kelas IV adalah ... orang.
- 28
 - 29
 - 30
 - 31
 - 32
23. Terdapat dua buah kelompok data sebagai berikut: data kelompok pertama yaitu 2, a , a , 3, 4, 6 mempunyai nilai rata-rata c , data kelompok kedua 2, c , c , 4, 6, 2, 1 mempunyai rata-rata $2a$. Nilai c adalah
- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
24. Panjang sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmatika. Jika keliling segitiga siku-siku tersebut adalah 72, maka luas segitiga siku-siku tersebut adalah
- 206

- b. 216
- c. 226
- d. 412
- e. 432

25. Perhatikan gambar segitiga berikut ini:



Titik D terletak pada garis AB, sehingga CD tegak lurus dengan AB. Panjang garis AD adalah

- a. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$
- b. $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$
- c. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$
- d. $\frac{1}{6}a\sqrt{2}$
- e. $\frac{1}{6}a\sqrt{6}$

26. P_1 : Jika Ani membeli baju, maka Siti membeli sepatu

P_2 : Jika Dina tidak membeli celana, maka Siti tidak membeli sepatu

P_3 : Ani membeli baju

Kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah

- a. Dina tidak membeli celana.
- b. Siti membeli sepatu.
- c. Dina membeli celana.
- d. Siti tidak membeli sepatu.
- e. Ani tidak membeli baju.

27. Salah satu akar persamaan kuadrat $mx^2 - 3x + 2 = 0$ adalah dua kali akar yang lain. Nilai m yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut adalah

- a. 3
- b. 2
- c. 1

d. 0

e. -1

28. Persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $3x - 4y + 2 = 0$ dan melalui titik (2,3) adalah

a. $4x - 3y - 17 = 0$

b. $4x + 3y - 17 = 0$

c. $-4x - 3y - 17 = 0$

d. $-4x + 3y - 17 = 0$

e. $4x + 3y - 1 = 0$

29. Rumus suku ke- n dari barisan -4, -1, 2, 5, ... adalah

a. $3n - 1$

b. $3n + 1$

c. $3n - 4$

d. $3n - 7$

e. $3n + 7$

30. Sebuah garis $f(x) = ax + 7$ dan $f(x) = x^2 + bx + 6$ berpotongan pada dua buah titik yaitu (-1, 12) dan

a. (1, 2)

b. (1, 12)

c. (2, -3)

d. (2, 3)

e. (0, 7)

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF KB 1

1. C
2. A
3. D
4. E
5. A
6. C
7. A
8. B
9. B
10. E

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF MODUL 2 KB 2

1. D
2. E
3. B
4. C
5. A
6. D
7. D
8. C
9. D
10. B

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF MODUL 2 KB 3

1. C
2. C
3. D
4. E
5. B
6. B
7. E
8. C
9. A
10. D

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF MODUL 2 KB 4

1. B
2. D
3. D
4. A
5. C
6. B
7. E
8. D
9. A
10. A

KUNCI JAWABAN TES SUMATIF

1. B
2. D
3. A
4. C
5. A
6. B
7. E
8. D
9. B
10. B
11. E
12. D
13. B
14. C
15. D
16. B
17. C
18. D
19. B
20. A
21. E
22. C
23. C
24. B
25. E
26. C
27. C
28. B
29. D
30. A